

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 25/27

August/September 1947

Heft 5/6

Deutsche Mathematiker-Tagung in Karlsruhe vom 10. bis 12. 4. 1947.

VORTRAGSFOLGE.

A. Angewandte Mathematik.

Eigenwertaufgaben bei einer Klasse linearer Integro-Differentialgleichungen.

Von L. Collatz in Hannover.

Vorgelegt sei eine Integro-Differentialgleichung der Form

$$\Phi[y] = M[y] + k \int_a^b F(x, \xi) y(\xi) d\xi = \lambda \{N[y] + k \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi\} = \lambda \Psi[y] \quad (1).$$

Dabei seien M und N lineare homogene Differentialausdrücke

$$M[y] = \sum_{\varrho=0}^m \mu_{\varrho}(x) y^{(\varrho)}(x), \quad N[y] = \sum_{\varrho=0}^n \nu_{\varrho}(x) y^{(\varrho)}(x);$$

$\mu_{\varrho}(x), \nu_{\varrho}(x)$ seien in einem Intervall $a \leq x \leq b$ gegebene stetige Funktionen von x , $F(x, \xi)$ und $G(x, \xi)$ in $a \leq x, \xi \leq b$ gegebene, etwa stetige Funktionen von x und ξ ; k ist ein gegebener Parameter, λ der gesuchte Eigenwert mit $y(x)$ als zugehöriger Eigenfunktion. Es sei $m > n$; wir nennen m die Ordnung der Integro-Differentialgleichung, dementsprechend treten zu (1) noch m lineare homogene, voneinander linear unabhängige Randbedingungen hinzu

$$U_{\mu}[y] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m) \quad (2).$$

Die gewöhnlichen Integralgleichungen ordnen sich hier als Integro-Differentialgleichungen nullter Ordnung unter, bei ihnen treten keine Randbedingungen hinzu. Jedoch sind unter den Integro-Differentialgleichungen nullter Ordnung z. B. auch Gleichungen wie

$$\int_a^b K(x - \xi) y(\xi) d\xi = \lambda \int_a^b L(x - \xi) y(\xi) d\xi$$

enthalten, deren Lösungen in geschlossener Form durch Fourierentwicklung sofort angegeben werden können; je nach den gewählten Funktionen $K(x)$ und $L(x)$ können Eigenwerte λ mit unendlich hoher Vielfachheit (sogar unendlich viele solcher Eigenwerte) und überlagert mit kontinuierlichen Spektren auftreten.

Es werde eine speziellere Problemklasse herausgegriffen. Eine n -mal stetig differenzierbare, alle Randbedingungen erfüllende Funktion $u(x)$ mit $u(x) \equiv 0$ heiße Vergleichsfunktion. Der Funktionalausdruck $\Phi[u]$ heiße (hermitisch) selbstadjungiert, wenn 1. für zwei beliebige Vergleichsfunktionen u, v gilt:

$$\int_a^b (u M[v] - v \overline{M}[u]) dx = 0,$$

und 2. der Kern hermitisch (bei Betrachtung nur im Reellen also symmetrisch) ist: $F(x, \xi) = \overline{F(\xi, x)}$. Dabei ist \overline{M} der zu M konjugiert komplexe Operator

$$\overline{M}[y] = \sum_{\varrho=0}^m \overline{\mu_{\varrho}}(x) y^{(\varrho)}(x).$$

Der Operator Φ heißt volldefinit, wenn für alle Vergleichsfunktionen u gilt: $\int_a^b \overline{u} \Phi[u] dx > 0$.

Die Eigenwertaufgabe heißt selbstadjungiert, wenn Φ und Ψ beide (hermitisch) selbstadjungiert sind. In diesem Falle gilt für zu zwei Eigenwerten λ_j, λ_k gehörige Eigenfunktionen y_j, y_k die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_a^b \overline{y_k} \Phi[y_j] dx = \int_a^b \overline{y_k} \Psi[y_j] dx = 0 \quad \text{für } \lambda_j \neq \overline{\lambda_k};$$

es gibt Beispiele, daß die Selbstadjungiertheit hier nicht zur Realität der Eigenwerte ausreicht.

Ist aber außerdem wenigstens einer der beiden Funktionalausdrücke $\Phi[u]$, $\Psi[u]$ volldefinit, so sind alle Eigenwerte reell; sind sogar $\Phi[u]$ und $\Psi[u]$ volldefinit, so sind alle Eigenwerte positiv,

wie man aus dem R a y l e i g h schen Quotienten $R[u] = \frac{\int_a^b u \Phi[u] dx}{\int_a^b u \Psi[u] dx}$ erkennt. Besonders über-

sichtliche Ergebnisse erhält man bei ausgearteten Kernen; es ergibt sich für die Eigenwerte λ eine Determinante, welche sich für Integralgleichungen auf die F r e d h o l m s c h e und für Differentialgleichungen auf die bekannte Determinante $|U_\mu[y_r]|$ reduziert.

Bei einem numerischen Beispiel

$$y^{IV} - 20 y'' + k \int_{-1}^1 y dx = \lambda (1 + x^2) y; \quad y(\pm 1) = y'(\pm 1) = 0$$

(Lotrechte Schwingungen einer Hängebrücke nach K. Klöppel — K. H. Lie, Ing. Arch. 13 [1942], S. 211—266) zeigen sich die bei Differentialgleichungen bekannten Verfahren: R a y l e i g h scher Quotient, R i t z s c h e s Verfahren, Differenzenverfahren, schrittweise Näherungen Potenzreihenentwicklung, auch hier als bequem durchführbar. Da hier k linear auftritt, lassen sich in einer k - λ -Ebene die „Eigenkurven“ leicht konstruieren, so sind z. B. auch bei mehrgliedrigem R i t z s c h e n Ansatz nicht etwa algebraische Gleichungen höheren Grades zu lösen, sondern die Determinanten werden in k linear und brauchen nur nach k aufgelöst zu werden.

Divergenz und Rotor in nicht-flächennormalen Vektorfeldern.

Von Fritz Emde in Pretzfeld (Oberfranken).

Der Vektor („Tangentenvektor“)

$$t = [\underline{f} \underline{v}] + \underline{f} \sqrt{1 + \underline{v} \underline{f} \underline{f} \underline{v}} \quad \dots \dots \dots (1)$$

vom Betrage eins ($t t = 1$) ändere sich stetig mit dem Ort $r = i x + j y + k z$. Welche geometrische Bedeutung haben $\text{div } t$ und $\text{rot } t$?

1. In dem beliebigen Feldpunkt $r = 0$ sei der Einheitsvektor t , dem die Tangente an der durch $r = 0$ gehenden Feldlinie $[t dr] = 0$ parallel ist, $t = \underline{f}$ und in der Nachbarschaft sei näherungsweise

$$t = [\underline{f} \underline{v}] + \underline{f} = \underline{f} + \Phi r \quad \dots \dots \dots (2).$$

Hierin entstehe der wegen der Stetigkeit kleine und zu \underline{f} senkrechte Abweichungsvektor $[\underline{f} \underline{v}]$ aus dem Ortsvektor r durch eine affine Verzerrung, er sei eine lineare vektorische Funktion Φ von r . Der Affinor Φ soll also jeden Ortsvektor r des Raumes in einen zu \underline{f} senkrechten Vektor verwandeln. (Vgl. J. Spielrein, Vektorrechnung, 2. Aufl., Stuttgart 1926, S. 292.) Es kommt darauf an, Φ in geeigneter Form anzusetzen.

2. Es sei $\underline{f} \underline{g} = 0$ und $\underline{g} \underline{g} = 1$. Wir bilden das Spiegelbild \underline{s} des Ortsvektors r an einer zu \underline{g} parallelen Geraden. Dann ist $\underline{s} = (\underline{g} \cdot \underline{g} + \underline{g} \underline{g}) r$. (Spielrein, S. 333.) Zur Abkürzung setzen wir $-\underline{f} \underline{f} r = r - \underline{f} z = r_1$. Wenn aus r das Spiegelbild \underline{s}_1 von r_1 entstehen soll, so müssen wir setzen

$$\underline{s}_1 = A r = r A \quad \text{mit} \quad A = \underline{f} \cdot \underline{f} + \underline{g} \cdot \underline{g} + \underline{g} \underline{g} \quad \dots \dots \dots (3).$$

Es ist $A \underline{f} = 0$, daher $A r = A r_1$. Ebenso $[\underline{f} r] = [\underline{f} r_1]$. Wenn sich r_1 linksherum dreht, dreht sich \underline{s}_1 rechtsherum. Der Winkel zwischen \underline{g} und der Anfangslage $\varphi = 0$ des Ortsvektors r_1 heiße γ . Dann schließen \underline{g} und r_1 den Winkel $\gamma + \varphi$ ein und \underline{s}_1 und r_1 einen doppelt so großen Winkel:

$$\underline{g} r_1 = r_1 \cos(\gamma + \varphi), \quad \underline{s}_1 r_1 = r_1^2 \cos 2(\gamma + \varphi), \quad [\underline{s}_1 r_1] = \underline{f} r_1^2 \sin 2(\gamma + \varphi) \quad \dots \dots (4)$$

$$\underline{s}_1 = r_1 \cos 2(\gamma + \varphi) + [\underline{f} r] \sin 2(\gamma + \varphi) \quad \dots \dots \dots (5).$$

3. Wir setzen den Affinor Φ in folgender Form an:

$$\Phi = -\varrho \underline{f} \underline{f} + \tau A + \kappa [\underline{b} \underline{f}] \cdot \underline{f} + \sigma \underline{f} \quad \dots \dots \dots (6).$$

Hierin seien ϱ , τ , κ , σ feste Zahlen, und \underline{b} sei ein zu \underline{f} senkrechter fester Einheitsvektor ($\underline{f} \underline{b} = 0$, $\underline{b} \underline{b} = 1$). Es sei also der Abweichungsvektor annähernd

$$t - \underline{f} = \varrho r_1 + \tau \underline{s}_1 + \kappa [\underline{b} \underline{f}] z + \sigma [\underline{f} r] \quad \dots \dots \dots (7)$$

und nach (5)

$$t - \underline{f} = r_1 \{\varrho + \tau \cos 2(\varphi + \gamma)\} + [\underline{f} r] \{\sigma - \tau \sin 2(\varphi + \gamma)\} + [\underline{b} \underline{f}] \kappa z \quad \dots \dots (8).$$

Durch den Ausdruck (8) ist der zu \mathbf{f} senkrechte Abweichungsvektor in eine radiale, eine zirkulare und eine Komponente von fester Richtung zerlegt. Den Faktor von r_1 wollen wir die Spreizung nennen und den Faktor von $[\mathbf{f}r]$ die Drillung. Wenn der Berührungspunkt in der zu \mathbf{f} senkrechten Ebene den Umfang eines Kreises mit dem kleinen Radius r durchläuft, so schwanken die Spreizung und die Drillung sinusartig um Mittelwerte ϱ und σ mit derselben Schwankungs-Amplitude τ . Bei einem Umlauf werden zwei Perioden durchlaufen. Die Mittelwerte der Spreizung und der Drillung liegen um einen halben rechten Winkel gegeneinander versetzt.

Wenn der Tangentenvektor, an der Feldlinie um ein Stückchen z entlang gleitend, von $r = 0$ nach dem Nachbarpunkt $r = \mathbf{f}z$ rückt, so geht er aus $t = \mathbf{f}$ in $t = \mathbf{f} + [\mathbf{b}\mathbf{f}]\kappa z$ über, dreht sich also um einen um so größeren Winkel, je größer κ ist. Daher bedeutet κ die Krümmung der Feldlinie im Nullpunkt und $1/\kappa$ ihren Krümmungsradius. Der Einheitsvektor $[\mathbf{b}\mathbf{f}] = \mathbf{h}$ hat die Richtung der Hauptnormale und \mathbf{b} die Richtung der Binormale der Feldlinie.

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß der ebene Affinor (6) allgemein genug angesetzt ist.

4. $\text{div } t = \text{div } \Phi r$ ist gleich dem ersten Skalar $S_1 \Phi$ des Affinors Φ . (Spielrein, S. 284, 370; Formelsammlung S. 21, 40.) Nun ist $S_1 \mathbf{f} \mathbf{f} = -2$ und nach (3) $S_1 A = 1 + 1 - 2 = 0$ (der symmetrische Affinor A ist also ein Deviator; Spielrein, S. 305). $S_1 ([\mathbf{b}\mathbf{f}] \cdot \mathbf{f}) = = [\mathbf{b}\mathbf{f}] \mathbf{f} = 0$, $S_1 \mathbf{f} = 0$, folglich nach (6)

$$\text{div } t = 2 \varrho \dots \dots \dots (9).$$

Die Divergenz des Tangentenvektors ist doppelt so groß wie die mittlere Spreizung.

Wenn T der symmetrische und \mathfrak{B} der alternierende Teil des Affinors $\Phi = T + \mathfrak{B}$ ist, so ist $\text{rot } \Phi r = 2 \mathfrak{B}$ doppelt so groß wie der Drehvektor \mathfrak{B} des Affinors Φ . (Spielrein, S. 299, 370.) Man bezeichnet $-2 \mathfrak{B}$ auch als den Turbor des Affinors Φ . Nun ist $\text{rot } r_1 = 0$ und nach (3) $-t \mathbf{b} A = 0$; $-t \mathbf{b} ([\mathbf{b}\mathbf{f}] \cdot \mathbf{f}) = [\mathbf{f} [\mathbf{b}\mathbf{f}]] = \mathbf{b}$, $-t \mathbf{b} \mathbf{f} = 2 \mathbf{f}$; folglich nach (6) mit $\mathbf{f} = t$ im Nullpunkt

$$\text{rot } t = \kappa \mathbf{b} + 2 \sigma t \dots \dots \dots (10).$$

Der Rotor des Tangentenvektors hat eine Komponente in Richtung der Binormale, ihr Betrag ist gleich der Krümmung der Feldlinie, und eine Komponente in Richtung der Tangente der Feldlinie, ihr Betrag ist doppelt so groß wie die mittlere Drillung.

Wenn $\sigma = 0$ ist, lassen sich durch die Feldlinien Normalflächen legen, und dann bedeutet $\frac{1}{2} \text{div } t = \varrho$ die mittlere Krümmung der Normalfläche im Nullpunkt.

5. Ein bemerkenswertes Beispiel ist: $t = j \sin 2 \sigma x + \mathbf{f} \cos 2 \sigma x$, wofür man ausrechnet $\text{rot } t = 2 \sigma t$: der Rotor ist seinem Vektor parallel. Die Feldlinien sind zur x -Achse senkrechte Geraden. Ihre Windung (Torsion) ist daher $= 0$, nicht aber ihre mittlere Drillung σ .

Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete.

Von H. Wittich in Göttingen.

Die Aufgabe, ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit mindestens zwei Randpunkten schlicht und konform in einen Kreis abzubilden, wird durch den Abbildungssatz von R i e m a n n theoretisch vollständig erledigt, während die praktische Durchführung dieser Aufgabe auf z. T. recht erhebliche Schwierigkeiten stößt. Bei der Suche nach Ansatzpunkten für die praktische Rechnung liegt es nahe, die vorliegenden Beweise des Abbildungssatzes nach diesem Gesichtspunkt zu durchmustern.

Das von P. K o e b e ausgebildete Schmiegungsverfahren eignet sich prinzipiell für die praktische Rechnung. Durch eine Folge von Funktionen $w_n(z)$ wird das gegebene Gebiet G_z in eine Folge von Gebieten G_n abgebildet, die sich mit wachsendem n dem Normalgebiet $|w| < 1$ mehr und mehr anschmiegen. Ist r_n der Radius des größten in G_z gelegenen Kreises, so gilt $1 - r_n < \frac{C}{n}$. Die Konvergenz des Verfahrens ist also im allgemeinen schlecht. Interessiert man sich besonders für das Verhalten der Funktion $w(z)$ in Randnähe, wie z. B. in der Aerodynamik, so ist ein solches Verfahren wenig geeignet.

Die potentialtheoretischen Begründungen des Abbildungssatzes lassen sich für die praktische Rechnung recht gut verwenden. Danach ist die G r e e n s c h e Funktion des gegebenen

Gebietes G_z zu bestimmen. Diese Aufgabe führt auf die Lösung einer Integralgleichung

$$f(s) = l \cdot \int_{-1}^{+1} K(s, t) f(t) dt + g(s) \quad \dots \quad (I).$$

Man ersetzt (I) durch eine Summe und zwar so, daß man statt der zu betrachtenden Integralgleichung ein zweckmäßig gewähltes, lineares System mit nur wenig Unbekannten erhält.

$$f(s) = l(b-a) \sum_{j=1}^n G_j K(s, t_j) f(t_j) + g(s) \quad \dots \quad (1).$$

Für $s = t_k$, $k = 1, \dots, n$, erhält man in

$$f(t_k) = l(b-a) \sum_{j=1}^n G_j K(t_k, t_j) f(t_j) + g(t_k), \quad k = 1, \dots, n \quad \dots \quad (2).$$

ein lineares Gleichungssystem, das zur Bestimmung der gesuchten Funktion an den Stellen $s = t_1, \dots, t_n$ dient. (1) ist dann eine Näherung für $f(s)$. Nach N y s t r ö m erhält man eine gute Näherung, wenn man beim Übergang von (I) zu (1) die Quadraturformel von G a u ß benützt.

Eine andere Methode, die sich auf Eigenschaften schlichter konformer Abbildungen gründet, benützt H ö h n d o r f in „Verfahren zur Berechnung des Auftriebes gegebener Tragflächenprofile“¹⁾. Die Begründung des Verfahrens gab L. B i e b e r b a c h in verschiedenen Beiträgen zur Theorie der konformen Abbildung. Der zu leistende Rechenaufwand ist sehr groß im Vergleich zu dem noch zu erwähnenden Abbildungsverfahren von T h e o d o r s e n - G a r r i c k.

Das schlichte, einfach zusammenhängende Gebiet G_w (Randkurve Γ) enthalte $w = 0$. Gesucht ist diejenige Funktion $w = w(z)$, die $|z| < R$ schlicht und konform in G_w abbildet ($w(0) = 0$, $w'(0) = 1$). Mit $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$, $w = P e^{i\Theta}$ auf Γ erhält man für Real- und Imaginärteil der Funktion $h(z) = \log \frac{w(z)}{z} = c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ die Reziprozitätsformeln

$$\Theta(\varphi) - \varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{P(\alpha)}{R} \cotg \frac{\alpha - \varphi}{2} d\alpha, \quad \log \frac{P(\varphi)}{R} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Theta(\alpha) - \alpha) \cotg \frac{\alpha - \varphi}{2} d\alpha$$

$$\text{und} \quad \log R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log P(\alpha) d\alpha, \quad \int_0^{2\pi} (\Theta(\alpha) - \alpha) d\alpha = 0.$$

Es sei $P = F(\Theta)$, $F(\Theta)$ eine in Θ eindeutige und stetig differenzierbare Funktion. Mit $\log P(\varphi) = \log F(\Theta(\varphi)) = f(\varphi + g(\varphi))$, $g(\varphi) = \Theta(\varphi) - \varphi$ erhält man

$$g(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + g(\alpha)) \cotg \frac{\alpha - \varphi}{2} d\alpha \quad \dots \quad (3).$$

Das ist eine nichtlineare Integralgleichung für die Winkelverschiebung $\Theta(\varphi) - \varphi = g(\varphi)$. Ausgehend von einer Lösung der Integralgleichung (3) kann man unter gewissen Voraussetzungen zur tatsächlichen Berechnung der Abbildungsfunktion $w = w(z)$ bzw. ihrer Umkehrfunktion $z = z(w)$ vordringen. Zur Lösung von (3) macht man den Ansatz

$$g_{n+1}(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + g_n(\alpha)) \cotg \frac{\alpha - \varphi}{2} d\alpha.$$

Man kann nicht erwarten, daß dieser Ansatz ohne zusätzliche Bedingungen an G_w stets zum Ziele führt. Eine genauere Diskussion führt zu folgendem hinreichenden Konvergenzkriterium: Es sei $M = \max_{0 \leq \Theta \leq 2\pi} \left| \frac{df}{d\Theta} \right|$ und die Ausgangsnäherung $g_0(\varphi)$ stetig differenzierbar. Dann gilt im Sinne gleichmäßiger Konvergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\varphi) = g(\varphi)$, wenn $M \leq 1/12$ ist. Diese Bedingung besagt, daß G_w nicht stark von einem Kreise abweichen darf. Durch vorbereitende Abbildungen mittels bekannter Funktionen kann man bei vielen praktisch vorkommenden Gebieten G_w auf diesen Fall zurückkommen. Die Erfahrungen der praktischen Rechnung lassen vermuten, daß die Zahl $1/12$ durch eine größere Schranke ersetzt werden kann.

¹⁾ Z. angew. Math. Mech. 6 (1926), S. 265–283.

Konforme Abbildung eines Streifens mit Halbkreiskerbe.

Von Egon Ullrich in Gießen.

1. Verschiedene Aufgaben der Technik lassen es wünschenswert erscheinen, die konforme Abbildung (künftig kurz: Abbildung) von Kreisbogenvierecken so eingehend zu bearbeiten, daß auch diese Abbildungen zu dem bereits vorhandenen Vorrat an völlig beherrschbaren Abbildungen hinzukommen. Über die bekannten Abbildungen hinaus, die aus elementaren Funktionen schrittweise zusammengesetzt werden können (lineare Funktionen, Potenzen, Exponentialfunktionen), hat man da vor allem Sonderfälle des Schwarz-Christoffelschen Integrals erschlossen, wozu z. B. die elliptischen Integrale gehören: dadurch werden Dreiecke und Rechtecke, sowie allgemeinere Polygone angreifbar. Aber bei mehr als fünf Ecken treten zusätzliche, erhebliche Schwierigkeiten aus der erforderlichen Konstantenbestimmung auf. Die Behandlung der hypergeometrischen Funktion führt zur Abbildung von Kreisbogendreiecken, mittels der Lösungsquotienten der hypergeometrischen Differentialgleichung. Kreisbogenvierecke sind seit kurzem in das Blickfeld der Forschung gerückt — ihre Abbildung führt in Sonderfällen (Vierecke mit drei rechten Winkeln) auf die Lösungsquotienten der nächst allgemeineren Differentialgleichung, der Laméschen Differentialgleichung: Sie zeigt vier feste Singularitäten, Stellen der Bestimmtheit. Einen verwandten Fall wollen wir hier skizzieren, der eine neue, technisch interessante Abbildung betrifft. Bekanntlich ist parallel die Forschung auf dem Gebiet der speziellen Funktionen zur Zeit im Begriffe, den Umkreis der Laméschen Differentialgleichung in jeder Hinsicht, auch numerisch, zugänglich zu machen.

2. Wir gehen von einem ebenen *Kerbspannungsproblem* aus. Neuber hat in seiner Kerbspannungslehre (Springer-Verlag, Berlin 1937) das Spannungsverhalten im Kerbgrunde dadurch zu fassen gesucht, daß er das Gebiet zwischen einem Hyperbelast und der imaginären Hyperbelachse konform in eine Halbebene abbildete. C. Weber (Z. angew. Math. Mech. 20 [1940], S. 266 bis 270) bildet zum gleichen Zweck die Halbebene mit Kreisbogenkerbe ab. Beides kann durch lineare Abbildung und (allgemeine) Potenz erledigt werden. Es wird so möglich, die Airysche Spannungsfunktion aufzustellen und zu den erwünschten Aufschlüssen über die Spannung im Kerbgrunde vorzustoßen.

Indes scheinen beide Verfahren nicht voll befriedigend. Das eine mißachtet den Randverlauf in der Nähe der Kerbe selbst, das andere den der Kerbe gegenüberliegenden Rand — und man weiß von andren Aufgaben, daß solche Vereinfachungen nicht immer ausreichend sind. Es ist darum wünschenswert, die Abbildung eines Parallelstreifens mit Kreisbogenkerbe heranzuziehen, im einfachsten Fall mit Halbkreiskerbe. Die rechten Winkel bedeuten eine Vereinfachung der Differentialgleichung, deren Lösungsquotienten die gewünschte Abbildung leisten: Sie erlauben es, im Bereich schon zugänglicher Funktionen zu bleiben.

3. Ein zweites wichtiges Problem, das auf solche Abbildungen führt, bieten *verseilte Kabel*. Für die Dauerhaftigkeit der Isolierung der einzelnen Adern gegeneinander ist es von Belang, die Wärmeleitung zu untersuchen und zwar besonders in den Zwickeln zwischen berührenden Adern. Dies führt, wie zuerst V. Fock bemerkt hat (J. reine angew. Math. 161 [1926]), auf die konforme Abbildung eines Kreisbogenvierecks mit vier Nullwinkeln; Ausnutzung der Symmetrie in bezug auf Spiegelkreise erlaubt, auf Kreisbogenvierecke mit drei rechten und einem Nullwinkel zurückzugehen. Das entspricht der Laméschen Differentialgleichung mit ausgezeichneten Werten des Parameters.

Neuerdings ist ein verwandtes Problem in einer Aachener Dissertation (Loser 1947) behandelt. Dort wird die Abbildung des Kreisbogenvierecks (die exakt durchführbar wäre) durch Näherungsabbildungen umgangen. Gleichwohl können die für den Kabelfachmann erforderlichen Auskünfte gewonnen werden. Insbesondere wird der Grenzübergang bei wachsender Aderanzahl $n \rightarrow \infty$ durchgeführt.

4. W. v. Koppenfels hat eingehend Kreisbogenvierecke behandelt, deren vierter Winkel — neben drei Rechten — ein ungerades Vielfaches von einem Rechten ist. Dabei hat man es mit Lösungsquotienten der Laméschen Differentialgleichung mit ganzzahligem Parameter zu tun (J. reine angew. Math. 181 [1939]). Der Focksche Fall ordnet sich bei halbzahligen Parameter unter.

5. Der *Parallelstreifen mit Halbkreiskerbe* führt auf eine neue, aber doch verwandte Differentialgleichung. Wir erinnern daran, was aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen im Komplexen dienlich ist: In

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \dots\dots\dots (1)$$

seien die Koeffizienten $p(z)$, $q(z)$ rationale Funktionen von z . Zu jeder Stelle z_0 gibt es zwei linear unabhängige Lösungen $w_v(z, z_0)$, $v = 1, 2$; sie sind regulär, wo p und q es sind, während bei Sin-

gularitäten $z_0 = s$ von p oder q auch Singularitäten der beiden Lösungen auftreten können. Bei einem Umlauf von z um s entsteht im allgemeinen ein neues Fundamentalsystem, also wenn $\omega(z) = w_2(z) : w_1(z)$ einen Lösungsquotienten bedeutet,

$$\begin{aligned} W_1(z, z_0) &= a w_1 + b w_2 \\ W_2(z, z_0) &= c w_1 + d w_2 \end{aligned} \quad \Omega(z, z_0) = \frac{a + b \omega(z)}{c + d \omega(z)} \quad (2).$$

Führt $\omega(z)$ Strecke in Strecke, so $\Omega(z)$ Strecke in Kreisbogen über.

Aus dieser Lösungsschar kann man in der Regel zwei, in einem Ausnahmefall jedenfalls aber noch eine multiplikative Lösung aussondern, die sich bei einem solchen Umlauf nur mit einer Konstanten multipliziert (statt von beiden Ausgangslösungen abzuhängen). Man spricht von einer Stelle der Bestimmtheit für die Differentialgleichung, wenn man bei der Darstellung dieser Lösungen abgesehen von der allgemeinen Potenz, bzw. im Ausnahmefall vom Logarithmus, mit gewöhnlichen Potenzreihen auskommt. Dazu ist notwendig und hinreichend

$$p(z) = p_0(z-s)^{-1} + \dots, \quad q(z) = q_0(z-s)^{-2} + q_1(z-s)^{-1} + \dots \quad (3).$$

Dann gilt

$$w_\nu(z, s) = (z-s)^{\varrho_\nu} \mathfrak{P}_\nu(z-s) \text{ also } \omega(z, s) = (z-s)^{\varrho_2 - \varrho_1} \Omega(z-s) \quad (4);$$

die charakteristischen Exponenten ϱ_1, ϱ_2 hängen von den Entwicklungskoeffizienten p_0, q_0 ab und bestimmen diese umgekehrt eindeutig:

$$\varrho^2 + (p_0 - 1)\varrho + q_0 = 0, \quad \varrho_1 + \varrho_2 = 1 - p_0, \quad \varrho_1 \varrho_2 = q_0 \quad (5).$$

Im Normalfall hat man dann eine Abbildung durch den Lösungsquotienten, die einen gestreckten Winkel in den Winkel $(\varrho_2 - \varrho_1)\pi$ überführt. Um z. B. einen rechten Winkel zu erzielen, kann man am einfachsten $\varrho_1, \varrho_2 = \frac{1}{2}, 0$ wählen, also $p_0 = \frac{1}{2}, q_0 = 0$.

Der Ausnahmefall endlich tritt ein, wenn die charakteristischen Exponenten sich um eine ganze Zahl $g \geq 0$ unterscheiden, etwa

$$\varrho_1 - \varrho_2 = g \quad (6).$$

Dann ist die zweite Lösung i. a. nicht mehr multiplikativ — gewiß nicht für $g = 0$: Es gilt dann — gleich für den Lösungsquotienten —

$$\omega(z) = \beta \log(z-s) + \mathfrak{L}(t-s) \quad (7).$$

Der gestreckte Winkel geht in einen Nullwinkel über.

Man kennt einfache Bedingungen dafür, daß auch im Unendlichen eine reguläre Stelle für beide Lösungen, bzw. eine Stelle der Bestimmtheit vorliege. Wir versagen es uns, diese hier aufzuführen, wie wir auch die Einzelheiten der Rechnung und die Aufstellung unserer Differentialgleichung auf die spätere, ausführliche Veröffentlichung verschieben. Wir zeigen dort, daß unsere Aufgabe ganz ähnlich wie die von Fock und Koppenfels schon behandelten Sonderfälle der Laméschen Differentialgleichung bis zu brauchbaren und numerisch beherrschbaren Resultaten verfolgt werden kann.

6. Wir wollen aber zuletzt noch ein bemerkenswertes qualitatives Ergebnis erwähnen, welches unsere Abbildungsfunktion als funktionentheoretisch besonders ausgezeichnet erkennen läßt. Wenn man ein Kreisbogenviereck (ω) der Fock-v. Koppenfelschen Art (wie § 3, 4) in die Halbebene (z) abbildet und die Abbildung analytisch fortsetzt, so erhält man im allgemeinen sowohl über der z - wie über der ω -Ebene unendlich vielblättrige Riemannsche Flächen, und der Gesamtverlauf der Abbildung wird unübersichtlich.

Spiegelt man aber vom Parallelstreifen mit Halbkreiskerbe ausgehend, und anderseits über der z -Ebene (Halbebene mit vier ausgezeichneten Randpunkten) — so erhält man in der Streifenebene (ω) nur eine schlichte Überdeckung, bei der die — etwa auf der reellen Achse angeordneten — Singularitäten der Abbildungsfunktion eine nirgends dichte Menge bilden; es entsteht ein Gebiet von unendlich hohem Zusammenhang; und die Abbildung in ihrem Gesamtverlauf gehört zu jener Klasse, die Koebe als eine *Hauptkreisuniformisierende* bezeichnet. Auf der andren Seite hat man eine regulär verzweigte Riemannsche Fläche mit vier auf einer Geraden angeordneten Verzweigungsorten, etwa ± 1 mit nur zweiblättrigen, und $\pm k^2$ mit nur unendlich vielblättrigen (logarithmischen) Windungspunkten überdeckt. Diese Fläche ist von unendlich hohem Geschlecht.

Wenn dieses letzte Ergebnis in sich auch von rein theoretischem Interesse ist, so zeigt es doch, daß auch die so rein mathematische Uniformisierungstheorie Koebes wenigstens eine Funktion einschließt, die erhebliches technisches Interesse verdient: Die Abbildung der Halbebene in den Parallelstreifen mit Halbkreiskerbe.

Zur numerischen Behandlung von Anfangswertproblemen bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Von *Heinz Unger* in Darmstadt.

Bei Anfangswertproblemen genügt es im allgemeinen, an Stelle der vollständigen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{v} + d(t) \cdot \dot{v} + c_1(t) \cdot v = 0$$

die reduzierte Gleichung

$$\ddot{y} + c(t) \cdot \dot{y} = 0 \quad \text{mit} \quad c(t) = c_1(t) - \frac{1}{2} \dot{d}(t) - \frac{1}{4} [d(t)]^2 \quad \dots \quad (1)$$

zu behandeln, die durch die Transformation $v = y \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \int d(t) dt\right)$ entsteht.

A. Entwicklung von Näherungsverfahren. Unter den Voraussetzungen: c, \dot{c}, \ddot{c} stückweise stetig und $c(t) \geq C > 0$ führen wir die Transformation

$$y = c(t)^{-1/4} \cdot w(x) \quad \text{mit} \quad x = x(t) = \int \sqrt{c(t)} dt \quad \dots \quad (2)$$

durch und erhalten für $w = w(x)$ die Differentialgleichung

$$w'' + [1 - q(x)] \cdot w = 0 \quad \text{mit} \quad q = \frac{\ddot{c}}{4c^2} - \frac{5}{16} \frac{\dot{c}^2}{c^3} \quad \dots \quad (3).$$

Ist $c(t)$ durch ein Polynom n -ten Grades darstellbar, so kann $|q(x)|$ beliebig klein gemacht werden, wenn t genügend groß gewählt wird. Dann kann (3) näherungsweise durch trigonometrische Funktionen gelöst werden. Um auch in anderen t -Bereichen und für beliebige, den obigen Voraussetzungen genügende c -Gesetze möglichst genaue Werte zu erzielen, werden in x -Richtung schrittweise vorgehende Näherungsverfahren entwickelt. Hierzu wird $1 - q(x)$ durch eine Näherungsfunktion $\varrho(x)$ so ersetzt, daß abschnittsweise bekannte Funktionen zum Aufbau der Lösung herangezogen werden können, z. B. a) Treppenkurve mit Kreis- oder Hyperbelfunktionen als Lösungen, b) Polygonzug mit Zylinderfunktionen¹⁾ der Ordnung $\pm 1/3, \pm 2/3$. Nach Umschreibung von (3) in die Form

$$w'' + \varrho(x) \cdot w = Q(x) \cdot w \quad \dots \quad (4)$$

löst man also die verkürzte Differentialgleichung mit $Q(x) \equiv 0$. Den dabei begangenen Fehler schätzt man durch eine zu (4) gehörige Integralgleichung ab.

Für gewisse Bereiche ist es vorteilhaft, auf das Polygonzugverfahren die Transformation (2) nochmals anzuwenden. Zur Lösung können dann wieder trigonometrische Funktionen herangezogen werden. Den dabei zusätzlich auftretenden Fehler kann man ebenfalls abschätzen.

Da (3) denselben Aufbau wie (1) hat, können die entwickelten Näherungsverfahren auch direkt auf (1) angewandt werden, wenn nur $c(t)$ stückweise stetig ist. Gerade die Transformation (2) bringt aber in vielen Fällen wesentliche Vorteile.

Unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen kann gezeigt werden, daß das Polygonzugverfahren eine schnellere gleichmäßige Konvergenz aufweist, als das Treppenverfahren.

B. Bestimmung der Fehlerschranken. Man stellt die zu (4) gehörige Integralgleichung

$$w(x) + \int_a^x K(x, z) \cdot Q(z) w(z) dz = A \cdot \bar{w}_1 + B \cdot \bar{\bar{w}}_1 \quad \dots \quad (5)$$

auf, wobei $\bar{w}_1, \bar{\bar{w}}_1$ ein Fundamentalsystem von (4) mit $Q \equiv 0$ bilden und $K(x, z)$ daraus aufgebaut ist. Aus (5) kann man für den Fehler die Abschätzung angeben:

$$|\Delta w(x)| \leq M(x) = \frac{K_m \cdot \int_a^x |Q(z) w_1(z)| dz}{1 - K_m \int_a^x |Q(z)| dz} \quad (\text{Nenner} > 0) \quad \text{und} \quad |\Delta w'(x)| \leq \frac{M(x) \cdot K'_m}{K_m}$$

$$\text{mit } K_m = \text{Max } |K(x, z)| \quad \text{und} \quad K'_m = \text{Max } \left| \frac{\partial K(x, z)}{\partial x} \right| \quad \text{für } a \leq z \leq x \leq b.$$

Die Fehlerabschätzung kann bei stetigem c und \dot{c} in w durchgeführt werden, sonst direkt in y .

¹⁾ Es können auch die Airy'schen Integrale herangezogen werden, vgl. Brit. Assoc. Math. Tables, Part-Volume B, Cambridge 1946.

Zur Durchführung dieser Fehlerschrankenbestimmung werden zwei linear unabhängige Näherungslösungen benötigt. Um mit einer nach einem Näherungsverfahren berechneten Lösung auszukommen und um die unabhängige Fehlerabschätzung auch im voraus durchführen zu können, werden die folgenden Abschätzungen entwickelt; die durch den Koeffizienten der Differentialgleichung und die Anfangsbedingungen gegeben sind.

C. Abschätzungen für y und \dot{y} in (1). Unter der Voraussetzung $c(t) \geq C > 0$ führen wir die Funktion ein:

$$Y^2 = y^2 + \frac{\dot{y}^2}{c(t)}.$$

Unter anderen ergeben sich dann die Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \text{a) } |y| &\leq Y_0, & |\dot{y}| &\leq Y_0 \sqrt{c(t)} \text{ für } \dot{c} > 0 \\ \text{b) } |y| &\leq Y_0 \sqrt{\frac{c_0}{c(t)}}, & |\dot{y}| &\leq Y_0 \sqrt{c_0} \text{ für } \dot{c} > 0 \end{aligned}$$

(Y_0, y_0, \dots Werte an der Ausgangsstelle). $K(x, z)$, $K'(x, z)$ lassen sich als Lösungen der Differentialgleichung (4) mit $Q \equiv 0$ ebenfalls abschätzen. Erweiterungen auf unstetige c -Gesetze und auf die inhomogene Differentialgleichung sind möglich. Ebenso können gewisse nichtlineare Differentialgleichungen behandelt werden. Für allgemeine c -Gesetze lassen sich aus anderen Überlegungen heraus weitere Abschätzungen herleiten.

Die Erfahrung hat gezeigt, daß in vielen Fällen die entwickelten Methoden anderen Näherungsverfahren zur Auflösung der Differentialgleichung 2. Ordnung, z. B. dem Verfahren nach Runge-Kutta-Nyström, überlegen sind, ganz abgesehen von der hier möglichen Fehlerabschätzung.

Elementare Behandlung des Helmholtzschen Raumproblems.

Von Günter Pickert in Tübingen.

Bei einer Darstellung der analytischen Geometrie wird der Übergang von der affinen zu metrischen Geometrie, also die Einführung der pythagoreischen Metrik, am anschaulichsten in der Behandlungsweise des Helmholtzschen Raumproblems bewerkstelligt: An eine gewisse Gruppe linearer homogener Transformationen, der „Drehungen um den Nullpunkt“, wird die Forderung der freien Beweglichkeit gestellt, d. h. jedes System inzidenter Richtungselemente — im dreidimensionalen Falle repräsentiert durch Halbgerade und Halbebene — soll durch genau ein Gruppenelement in ein beliebig vorgegebenes derartiges System übergeführt werden; dann gibt es eine bezüglich der Gruppe invariante positiv-definite quadratische Form, und die Gruppe besteht genau aus denjenigen Transformationen positiver Determinante, die diese Form invariant lassen. Der damit ausgesprochene Gruppensatz ist jedoch bisher nur unter geometrisch schlecht ausdrückbaren Zusatzvoraussetzungen und nicht elementar bewiesen worden. Seine vorgeschlagene Verwendung wird erst dadurch möglich, daß er im folgenden für den dreidimensionalen Raum elementar — insbesondere also ohne Benutzung infinitesimaler Transformationen — und ohne Zusatzvoraussetzungen hergeleitet wird.

Kleine deutsche Buchstaben bedeuten Vektoren, kleine lateinische reelle Zahlen, und die Elemente der in Frage stehenden Gruppe \mathcal{G} werden mit großen lateinischen Buchstaben als Linksoperatoren geschrieben, wobei E die identische Transformation bedeutet. Die Forderung der freien Beweglichkeit läßt sich im dreidimensionalen Fall zerlegen in

I: Wenn a, b und c, d je linear-unabhängig sind, so gibt es ein $R \in \mathcal{G}$ mit $Ra = rc$ ($r > 0$), $Rb = sc + tb$ ($t > 0$).

II: Wenn a, b linear-unabhängig sind und $Ra = a\alpha$ ($\alpha > 0$), $Rb = ca + db$ ($d > 0$) gilt, so ist $R = E$.

Durch Betrachtung der eine Ebene in sich überführenden Elemente von \mathcal{G} zeigt man nun, daß es zu vorgegebenem $a \neq 0$ genau ein $R \in \mathcal{G}$ mit $Ra = a$, $R^2 = E$, $R \neq E$ gibt. Diese Transformation besitzt nur noch -1 als weiteren Eigenwert, so daß die zu diesem gehörigen Eigenvektoren eine durch a eindeutig bestimmte Ebene \mathcal{E}_a bilden. Für $b \neq 0$ ist dann die Bezeichnung $b \in \mathcal{E}_a$ symmetrisch in a, b und definiert das Senkrechtstehen der beiden Vektoren aufeinander. Der Nullvektor wird als zu jedem Vektor senkrecht bezeichnet. Der so eingeführte Orthogonalitätsbegriff ist invariant gegenüber \mathcal{G} . Der Betrag $|a|$ eines Vektors a wird nach Wahl eines „Einheitsvektors“ $e \neq 0$ in Nachbildung des tatsächlichen Meßvorganges als diejenige Zahl $\alpha \geq 0$ bezeichnet, zu der es ein R mit $Ra = ae$ gibt. Die Unabhängigkeit des Faktors α von R und dabei

die Berechtigung der Definition folgt aus der Tatsache, daß $Re = xe$ ($x > 0$) stets $x = 1$ nach sich zieht. Der Betrag erweist sich als charakteristische Invariante eines Vektors. Jeder Vektor b läßt sich nun eindeutig nach a und \mathfrak{G}_a zerlegen, d. h. es gibt eine durch a, b eindeutig bestimmte Invariante p , so daß $b = pa$ senkrecht zu a ist. Durch

$$(a, b) = \begin{cases} |a|^2 p & \text{für } a \neq 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \end{cases}$$

ist jetzt eine invariante symmetrische Bilinearform definiert, so daß wir in $|a|^2$ die gewünschte positiv-definite quadratische Form gefunden haben. Wird die Gruppe der diese Form invariant lassenden linearen homogenen Transformationen mit \mathfrak{b}'_3 , die Untergruppe derjenigen von positiver Determinante mit \mathfrak{b}_3 bezeichnet, so erkennt man $\mathfrak{b}_3 \subseteq \mathfrak{G}$, also, da wegen II nicht $\mathfrak{G} = \mathfrak{b}'_3$ sein kann, $\mathfrak{G} = \mathfrak{b}_3$.

Für zwei Dimensionen ist der entsprechende Satz ohne weitere Zusatzvoraussetzungen falsch: Ein Gegenbeispiel wird durch die Gruppe der Matrizen $e^{f(x)} \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ mit $0 \leq x < 2\pi$, unstetigem f , $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(\pi) = 0$ geliefert. Für $n > 3$ gelang weder die Aufstellung eines Gegenbeispiels noch der Beweis des Satzes. Aus der abgeänderten Voraussetzung

II': Aus $a \neq 0$ und $Ra = aa$ ($a > 0$) folgt $a = 1$

und I folgt aber allgemein im n -dimensionalen Raum ($n \geq 3$) die Existenz einer invarianten positiv-definiten quadratischen Form. Aus I_n als dem n -dimensionalen Analogon von I und der Existenz einer solchen Form ergibt sich weiter, daß \mathfrak{G} entweder $= \mathfrak{b}_n$ oder $= \mathfrak{b}'_n$ ist. Die zweite Möglichkeit kann etwa durch die Forderung

III_n: Sind die a_i ($i = 1, \dots, n-1$) linear unabhängig, so folgt aus $Ra_i = a_i$ ($i = 1, \dots, n-1$) $R = E$

ausgeschlossen werden. Aus den anschaulich plausiblen Forderungen I_n , II', III_n läßt sich also auch allgemein für $n \geq 3$ die metrische Geometrie gewinnen.

Über die Anwendung der affinen Abbildung in der Geodäsie.

Von H. Merkel in Karlsruhe.

In der Geodäsie ergibt sich öfters die Aufgabe, ein sekundäres trigonometrisches Netz an ein erneuertes Hauptnetz anzuschließen, mit anderen Worten, ein Festpunktfeld so auf ein anderes abzubilden, daß gleichnamige identische Punkte zusammenfallen und gleichzeitig gewisse praktische Bedingungen erfüllt werden. Die strenge Durchführung der bekannten Anschlußverfahren ist sehr zeitraubend und umständlich. Eine brauchbare Lösung der Aufgabe liefert die affine Abbildung, wobei durch eine maschenweise Anwendung die Forderungen der Praxis in einfacher Weise zu erreichen sind.

Neuere Ergebnisse über Sphäroid-Funktionen.

Von J. Meixner in Aachen.

Die Differentialgleichung der Sphäroid-Funktionen

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left(\lambda - \gamma^2 x^2 - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0 \quad \dots \dots \dots (1),$$

wo λ, γ und m Parameter sind, entsteht bei der Separation der Wellengleichung in rotationselliptischen Koordinaten. Ihre Lösungen, die Sphäroid-Funktionen, sind in den letzten Jahren verschiedentlich untersucht worden. Durch Arbeiten von Bouwkamp¹⁾, Chu und Stratton²⁾, Geppert und Mitarbeitern³⁾ und durch den Verfasser⁴⁾ hat die Theorie der Sphäroid-Funktionen soviel Förderung erfahren, daß ihrer praktischen Anwendung auf Randwertprobleme aus Physik und Technik im allgemeinen keine besonderen Schwierigkeiten mehr entgegenstehen.

Über einige weitere Ergebnisse sei im folgenden kurz berichtet. Die in⁴⁾ angegebenen asymptotischen Reihen nach fallenden Potenzen von γ für die Eigenwerte λ der Differentialgleichung (1) konnten um zwei Glieder erweitert werden; sie sind damit ebensoweit bekannt wie die asymp-

¹⁾ Ch. J. Bouwkamp: Diss. Groningen 1941.

²⁾ L. Chu und J. A. Stratton: Journ. Math. Physics 20 (1941), S. 259.

³⁾ H. Geppert und Mitarbeiter: Zwei Berichte der ZWB 1944.

⁴⁾ J. Meixner: Bericht der ZWB 1944.

totischen Reihen für die Eigenwerte der Mathieuschen Differentialgleichung, in welche die ersteren für $m = 1/2$ übergehen. Für reelle positive γ ist mit $q = 1, 3, 5, 7, \dots$; $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\lambda = \gamma \cdot q + m^2 - \frac{1}{8} [q^2 + 5] - \frac{q}{64\gamma} [q^2 + 11 - 32m^2] - \frac{1}{1024\gamma^2} [5(q^4 + 26q^2 + 21) - 384m^2(q^2 + 1)] - \frac{1}{\gamma^3} [2^{-14}(33q^5 + 1594q^3 + 5621q) - 2^{-7}m^2(37q^3 + 167q) + \frac{m^4}{8}q] - \frac{1}{\gamma^4} [2^{-16}(63q^6 + 4940q^4 + 43327q^2 + 22470) - 2^{-9}m^2(115q^4 + 1310q^2 + 735) + \frac{3}{8}m^4(q^2 + 1)] - \frac{1}{\gamma^5} [2^{-20}(527q^7 + 61529q^5 + 1043961q^3 + 2241599q) - 2^{-15}m^2(5739q^5 + 127550q^3 + 298951q) + 2^{-9}m^4(355q^3 + 1505q) - \frac{1}{16}m^6q] + 0(\gamma^{-6}) \quad (2).$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen lassen sich in entsprechender Weise asymptotisch nach den Funktionen des parabolischen Zylinders entwickeln. Für rein imaginäre Werte von γ ergibt sich eine ähnlich gebaute Formel, die ebenfalls bis auf Glieder der Ordnung 0 (γ^{-6}) berechnet ist.

Bemerkenswert ist die Struktur der Struttischen Karten der Eigenwerte bei festem ganzen m , die sich von jener der Mathieuschen Differentialgleichung in mancher Hinsicht unterscheiden. Auch in den Zwischengebieten der Struttischen Karten liegen, insbesondere für $m = 1, 3, \dots$ interessante Verhältnisse vor, die hier jedoch nicht näher auseinandergesetzt werden können. Erwähnt seien noch Lösungen der Differentialgleichung (1), die durch ein endliches Aggregat algebraischer Funktionen von Potenzen und Exponentialfunktionen darstellbar sind. Die zugehörigen Werte von λ genügen einer algebraischen Gleichung vom Grad m (m ganz und positiv).

Fast alle bekannten und noch viele weitere Reihenentwicklungen der Sphäroid-Funktionen nach Zylinder- und Kugelfunktionen lassen sich als Spezialfälle einiger sehr allgemeiner Reihenentwicklungen vom Typ

$$f_1(x) f_2(x') = \sum_{t=-\infty}^{\infty} b_t(\gamma, \alpha) \varrho^{-1/2} J_{\nu+t+1/2}(\gamma \varrho) P_{\nu+t}^m\left(\frac{xx' - \alpha}{\varrho}\right) \left\{ \dots \dots \dots (3) \right.$$

wo $\varrho^2 = x^2 + x'^2 + \alpha^2 - 2\alpha xx' - 1$

herleiten; hierin sind $f_1(x)$ und $f_2(x')$ gewisse Lösungen der Differentialgleichung (1), J eine Besselsche, P eine Kugelfunktion; α und ν sind Parameter, von denen der letztere in bestimmter Weise von λ abhängt. Die $b_t(\gamma, \alpha)$ sind gewisse Lösungen eines fünfgliedrigen Rekursionsystems, das in speziellen Fällen dreigliedrig wird ($\alpha = 0$, bzw. $\alpha = \pm 1$). Die Konvergenzgebiete dieser Reihen lassen sich leicht angeben.

Integraldarstellungen der Sphäroid-Funktionen sind nicht bekannt; doch werden sie weitgehend ersetzt durch Integralbeziehungen zwischen Lösungen der Differentialgleichung (1) vom Typ

$$f_1(x') = \int K(x', x) \cdot f_2(x) \cdot dx \dots \dots \dots (4)$$

mit geeignetem Integrationsweg und geeignetem Kern $K(x', x)$. Diese Integralbeziehungen ermöglichen beispielsweise auch die Herleitung asymptotischer Reihen für die Sphäroid-Funktionen für große Werte von $|x|$.

Ein Kriterium für den Vergleich zweier Häufigkeiten.

Von Hans Münzner in Göttingen.

Für den Vergleich irgend zweier Verfahren oder Sorten genügt oft die Betrachtung eines alternierenden Merkmals, wie z. B. Erfolg und Mißerfolg bei Heilverfahren oder Brauchbarkeit und Unbrauchbarkeit bei Fabrikaten. In einer ersten statistischen Reihe, die sich auf das eine Verfahren (Sorte) bezieht, sei unter n_1 Beobachtungen x_1 -mal das Merkmal und y_1 -mal das Gegenmerkmal vorgekommen. Die entsprechenden Anzahlen für ein zweites Verfahren seien n_2 , x_2 und y_2 . Eine Entscheidung über das bessere der beiden Verfahren vermag die Differenz der relativen Häufigkeiten $\frac{x_1}{n_1}$ und $\frac{x_2}{n_2}$ nicht zu liefern, da sie auch zufällig zustande gekommen sein kann. Man sieht daher diese beobachtete Differenz nur dann als gesichert und damit als gesetzmäßig

an, wenn ebenso große oder noch größere Zufallsdifferenzen bei Fehlen eines gesetzmäßigen Unterschieds nur mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit (in der Regel etwa 0,01) zu erwarten sind. Die Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit ist der Hauptinhalt der sogenannten Sicherungskriterien¹⁾. Zu einer derartigen Sicherung ist umfangreiches Beobachtungsmaterial erforderlich, das in vielen Fällen, in denen unbedingt eine Entscheidung getroffen werden muß, nicht vorhanden ist. Für solche Fälle wird im folgenden ein einfaches Vergleichskriterium angegeben.

Zur Erfassung des Zufalls betrachten wir die beiden Beobachtungsreihen als repräsentative Stichproben aus zwei unendlichen Gesamtheiten, in denen für das Merkmal die Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 bestehen. Statt ihrer kennen wir nur die Merkmalshäufigkeiten der Stichproben; wir können sie zur Angabe von Wahrscheinlichkeitsverteilungen $w(p_i; x_i, n_i)$ für p_i bei $i = 1, 2$ benutzen. Hierzu dient die *Bayes'sche* Rückschlußformel, bei der bekanntlich das Aufstellen einer geeigneten Hypothese über die Randbedingung $w(p_i; 0, 0)$ zu einem viel diskutierten Problem geworden ist. Bei der Auffassung, die Verteilung $w(p_i; 0, 0)$ beschreibe einen objektiven Tatbestand, muß jede Hypothese bedenklich erscheinen. Wird dagegen in $w(p_i; 0, 0)$ lediglich eine tautologische Umformung unserer subjektiven durch das Fehlen jeglicher Beobachtung bedingten Unkenntnis gesehen, so erscheint die Annahme der Gleichverteilung $w(p_i; 0, 0) = 1$ als am meisten vertretbar. Wir legen diese Annahme unserem Vergleichskriterium zugrunde mit dem Bemerken, daß man es grundsätzlich genau so auch bei den Hypothesen von H. v. Schelling, W. Schäfer u. a. herleiten könnte.

Mit Hilfe der speziellen *Bayes'schen* Formel

$$w(p_i; x_i, n_i) = \binom{n_i}{x_i} p_i^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i} \quad (1)$$

bei $i = 1, 2$ berechnen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zwischen den unbekannten Merkmalswahrscheinlichkeiten die Beziehung $p_1 \geq p_2$ besteht. Wir erhalten hierfür

$$P(p_1 \geq p_2) = \int_0^1 \left[w(p_1; x_1, n_1) \int_0^{p_1} w(p_2; x_2, n_2) dp_2 \right] dp_1 = \frac{\sum_{k=0}^{y_2} \binom{x_1 + x_2 + k - 1}{x_1} \binom{y_1 + y_2 - k}{y_1}}{\binom{n_1 + n_2 + 2}{n_1 + 1}} \quad (2)$$

als Funktion $F(x_1, y_1, x_2, y_2)$ der vier beobachteten Anzahlen. Durch eine der Beziehungen

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2) = F(y_2, x_2, y_1, x_1) = 1 - F(x_2, y_2, x_1, y_1) = 1 - F(y_1, x_1, y_2, x_2) \quad (3)$$

läßt sich immer eine solche Form erreichen, daß die Anzahl der auf der rechten Seite von (2) zu summieren den Glieder gleich $\min(x_1, y_1, x_2, y_2) + 1$ ist. Diese Wahrscheinlichkeit $P(p_1 \geq p_2)$ soll nun als Vergleichskriterium verwendet werden. Eine Entscheidung zwischen den beiden Verfahren ist bei $P(p_1 \geq p_2) \neq 0,5$ immer möglich. Die Stichhaltigkeit einer solchen Entscheidung wird allerdings bei kleinem Beobachtungsmaterial gering sein. Als Maß hierfür kann die Wahrscheinlichkeit

$$W = 0,5 - |0,5 - P(p_1 \geq p_2)| \quad (4),$$

mit der Fehlentscheidungen möglich sind, benutzt werden.

Wenn W etwa von der Größenordnung 0,01 ist, kommen wir in den Bereich der Fälle, die durch die bekannten Sicherungskriterien erfaßt werden. Bei sehr großem Beobachtungsmaterial läßt sich für Formel (2) der Anschluß an bekannte Formeln gewinnen.

Die Wirksamkeit und Leistungsfähigkeit des Kriteriums zeigt folgendes Beispiel: Von zwei Heilverfahren hat das eine in 20 Fällen 18 mal zum Erfolg geführt, während das andere nur zweimal angewendet worden, aber beide Male erfolgreich gewesen ist. Auf Grund der relativen Erfolgshäufigkeiten 0,9 und 1,0 müßte das zweite Verfahren bevorzugt werden; allerdings macht die geringe Anzahl seiner Anwendungen es wenig vertrauenswürdig. Dies kommt auch bei dem angegebenen Vergleichskriterium zum Ausdruck, das mit $P = F(18, 2, 2, 0) = 0,657$ zugunsten des ersten Verfahrens, also des Verfahrens mit der kleineren relativen Häufigkeit entscheidet. Ebenso erhalten wir $F(18, 2, 3, 0) > 0,5$; $F(18, 2, 4, 0) > 0,5$ und erst $F(18, 2, 5, 0) < 0,5$.

¹⁾ Eine kritische Zusammenfassung der verschiedenen Vergleichsmethoden findet sich bei M. P. Geppert: Über den Vergleich zweier beobachteter Häufigkeiten. Dtsch. Math. 7 (1943/44).

Mathematische und maschinelle Methoden beim Chiffrieren und Dechiffrieren¹⁾.

Von Hans Rohrbach in Mainz.

In allen größeren Staaten werden Mathematiker zur Mitarbeit an der unberufenen Entzifferung herangezogen, die bei ihrer Tätigkeit selbstverständlich die ihnen gewohnten Methoden anwenden. Auch bei Fragen des Chiffrierens sind mathematische Methoden von Bedeutung. Einige Beispiele mögen dies belegen.

¹⁾ Eine ausführlichere Darstellung wird in FIAT Rev. Math. 2 (Applied Math.) erscheinen.

Viele Substitutionsverfahren lassen sich als Spezialfälle der Verschlüsselung mittels eines Schiebers (oder Scheibe) auffassen. Man hat die Theorie dieses Instruments vom mathematischen Standpunkt aus eingehend untersucht (Tauschverfahren, Spaltenverfahren, rekurrente Verfahren, Kryha, Enigma u. a. gehören dazu) und auf Fragen der Zahlentheorie und Algebra zurückgeführt. — Spezielle Sätze über Permutationen spielen eine Rolle, z. B. die Anzahl aller vollständig umgeordneten Permutationen, d. h. der Permutationen ohne Sequenzen. — Für einen Zahlencode sollen nur Gruppen zugelassen werden, deren Quersumme einem vorgeschriebenen Bereich angehört. — Ein Text wird mittels eines Zahlencodes umgesetzt und der Zahlentext mit einer Additionsreihe verschlüsselt, d. h. mit einer Zahlenfolge überschrieben, worauf elementweise mod 10 addiert wird. Die Zahlenfolge wird von dem Verziifferer in den ersten zehn Ziffern z_1, \dots, z_{10} beliebig gewählt und dann nach der Formel $z_n = z_{n-10} + z_{n-9}$ ($n = 11, 12, \dots$) nach Bedarf fortgesetzt. Aus Sicherheitsgründen soll sie eine möglichst lange Periode haben. Mit Hilfe der Theorie der Polynome über einem Galoisfeld kann man feststellen, daß diese Periode im allgemeinen rund 10^6 ist. Ausnahmen treten ein, wenn die Anfangsziffern z_v Koordinaten von Eigenvektoren gewisser Matrizen sind. — Für linear aufgebaute Codegruppenvorräte kennt man die Bedingungen, wann, falls alle Elemente einer Codegruppe bis auf eins und die Stelle des fehlenden Elements bekannt sind, dessen Wert eindeutig bestimmt werden kann; ebenso wann in einer Codegruppe zwei Nachbarelemente nicht vertauschbar sein dürfen. Diese zahlentheoretisch beantwortbaren Fragen sind für die Entzifferung fehlerhaft übermittelter Codegruppen von Bedeutung.

Beim Dechiffrieren (nur die unberufene Entzifferung kommt in Betracht) erfordern zuerst das Erkennen des zu lösenden Verfahrens, dann die systematische Lösung bis zur Erarbeitung aller zugehörigen Schlüssel eine Arbeitsweise, die der eines Vertreters der exakten Wissenschaften vollkommen angepaßt ist. Zur Beurteilung des zu lösenden Materials in bezug auf Häufigkeiten jeder Art werden Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung benutzt. Dabei spielen die asymptotischen Gesetze (Laplace-Grenzübergänge) nur eine geringe Rolle, wichtiger sind die *P o i s s o n*-schen Grenzübergänge. Eine die Anwendungen bei der Entzifferung berücksichtigende Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie enthält insbesondere für die Praxis berechnete Nomoogramme über zu erwartende Wiederholungen in zufälligem Material. Zur Lösung von maschinellen Chiffrierverfahren wird die Theorie der Permutationsgruppen mit Erfolg benutzt. Im übrigen müssen zur Lösung eines jeden Verfahrens, das kompliziert genug ist, spezifische Methoden ausgearbeitet werden, die immer wieder wechselnd die unberufene Entzifferungsarbeit so außerordentlich reizvoll machen. Sie können nur an Hand der jeweiligen Fälle geschildert werden.

Bei der statistischen Erfassung und Verarbeitung des Materials haben sich Lochkarten- (*H o l l e r i t h* -) Maschinen und *S i e m e n s* -Lochstreifen-Maschinen bewährt. Sämtliche Typen werden benutzt (Locher jeder Art, auch Rechenlocher, ferner Sortierer, Tabellierer, Doppler, Mischer u. a.). Die Schaltbarkeit einer Maschine in sich sowie die Kopplung mit anderen Maschinen werden restlos ausgenutzt, neue Maschinen aus genormten *H o l l e r i t h* teilen nach Bedarf zusammengesetzt (Spezialvergleicher). Mit ihnen wird das Material sortiert und sortiert geschrieben, nach Wunsch permutiert abgeschrieben, Wiederholungen werden gesucht und registriert, für die Lösungen von Additionsreihen Differenzen berechnet und katalogisiert, Additionsreihen hergestellt usw. Auch als Chiffriermaschine finden sie Verwendung.

B. Rechenggeräte, Geschichte der Mathematik.

Eine automatische Rechenmaschine mittels Röhren.

Von *Heinrich Pösch* in Weil/Rhein.

In Amerika wurde in den Jahren 1943—1945 die zur Zeit größte Rechenmaschine gebaut. Es handelt sich um eine Kriegserfindung, die jedoch in weitem Maße für friedliche Zwecke eingesetzt werden kann. Es können mit ihr Rechenprobleme größten Ausmaßes und fast beliebiger Art in Angriff genommen werden. So z. B. die Berechnung von Gezeitentabellen, von Stern- und Planetenstellungen oder Berechnungen über die Struktur der Atome. Die Maschine ist in einem Raume von 15×9 m untergebracht und wiegt 30 t.

In einem Bericht der *Nature* vom 12. 10. 1946 Nr. 4015, S. 500/506 veröffentlichte *H a r t r e e*, Manchester, seine Erfahrungen, die er beim Gebrauch der ENIAC gemacht hat. ENIAC = Electronic Numerical Integrator and Computer.

Die Einteilung der Rechenmaschinen nach der Art der Zahlenaufnahme. Man unterscheidet zwei Arten von Rechenmaschinen. Zur ersten Klasse gehören alle Rechenmaschinen, die Zahlen in physikalische Größen (Längen, Drehwinkel, elektrische Spannungen usw.) transformieren (Analogiemethode). Ein Beispiel hierfür ist die Integriermaschine

von Bush¹⁾. Bei ihr wurden Zahlen in Längen und Drehwinkel transformiert. Durch Räder- und Reibradgetriebe in Verbindung mit Schraubenmutter und Spindeln werden mathematische Operationen durchgeführt. Die Maschinen dieser Klasse verarbeiten kontinuierlich veränderliche Größen. Die Genauigkeit des Ergebnisses hängt weitgehend von der Präzision ab, mit der das Gerät arbeitet. Zur zweiten Klasse gehören alle Maschinen und Recheneinrichtungen, die die Zahlen unmittelbar in Ziffernform aufnehmen (Ziffernmethode). Ein Beispiel hierfür ist die Rechenmaschine von Brunsviga. Die Genauigkeit dieser Maschinen ist durch die Anzahl der Dekaden, die verarbeitet werden können, beschränkt.

Die Arbeitsfunktionen der Eniac.

Die Eniac gehört zur zweiten Klasse. Mit Hilfe elektrischer Kreise kann sie die Grundrechenarten und das Wurzelziehen ausführen.

Sie unterscheidet das Vorzeichen.

Sie erkennt, ob eine Zahl größer oder kleiner ist als eine andere.

Sie kann eine große Anzahl Zahlen speichern.

Sie kann aus einer Funktionstafel Werte entnehmen.

Sie liefert das Ergebnis in Form von Lochkarten.

Sie kann, und dies unterscheidet sie vor allem von den gewöhnlichen Rechenmaschinen, nach einem vorgegebenen Rechenplan, der der Maschine vorher mitgeteilt wird, eine Folge von Rechnungen vollautomatisch durchführen.

Nach Beendigung einer Rechenfolge kann sie dieselbe Folge mit anderen Zahlen selbsttätig wiederholen.

Der Aufbau der Eniac.

Als Grundelement benutzten Eckart und Mauchly in Amerika eine Elektronenröhre, eine Doppeltriode, und bauten damit an der Moore School an der Universität Pennsylvania in Philadelphia die Eniac.

Die Eniac arbeitet nach dem Dezimalsystem. 10 Doppeltriodenröhren sind in einem Ring vereinigt. Jede Röhre befindet sich entweder im normalen oder im Anzeigezustand. Es ist jeweils immer nur eine Röhre im Anzeigezustand. Ein solcher Zehnersatz von Doppeltrioden entspricht einer Zehnerstelle einer Zahl. Die Röhren sind von 0—9 numeriert und die Anzeigeröhre liefert die Ziffer der betreffenden Zehnerstelle. Mehrere Zehnersätze dieser Röhren bilden einen Zahlenspeicher. Man arbeitet mit elektrischen Spannungsimpulsen. Die Ziffer einer jeden Zehnerstelle bestimmt die erforderliche Impulsanzahl. Ein Impuls überträgt den Anzeigezustand von einer Röhre auf die nächste. Impulse steuern die Reihenfolge der Rechnungen.

Die Grundrechenarten.

Für die Addition ist eine Zehnerübertragung mittels Hilfsröhren entwickelt worden. Die Subtraktion erfolgt durch Addition der Komplementzahl. Für die sehr häufige Multiplikation wurde ein Hochgeschwindigkeitsmultiplikationsgerät entwickelt. Eine besondere Röhrenzusammensetzung bildet dabei eine Multiplikationstafel für das kleine Einmaleins, mit dieser multipliziert die Maschine den ganzen Multiplikanden der Reihe nach mit jeder Ziffer des Multiplikators und speichert Zehner und Einer der Produkte getrennt, die dann zum Schluß addiert werden. Die Division wird auf eine wiederholte Subtraktion zurückgeführt.

Die Arbeitsgeschwindigkeit der Eniac.

Die einzelnen Spannungsimpulse folgen in zeitlichen Abständen von 10^{-5} s. Der Impulsgeber liefert 10 Impulse alle $2 \cdot 10^{-4}$ s. Diese Zeit wird für die Durchführung einer Addition benötigt. Nach je 10 Impulsen ergibt sich somit eine Pause, während der Steuerimpulse irgendwelche Schaltungen vornehmen. Es können also pro s 5000 Additionen vorgenommen werden. Mit zehnziffrigen Multiplikatoren lassen sich pro s ca. 350 Multiplikationen ausführen. Oder in der s können 38 Divisionen mit zehnziffrigen Ergebnis geliefert werden. Die Eniac ersetzt somit ca. 10 000 Rechenkräfte, die je eine moderne elektrisch angetriebene Rechenmaschine zur Verfügung haben.

¹⁾ R. Sauer, H. Pösch: Integriermaschine für gew. Differentialgleichungen. Z. VDI. Bd. 87 (1943).

Automatisch arbeitende Geräte für wissenschaftliche Rechnungen.

Von H.-J. Dreyer in Darmstadt.

Zur Durchführung umfangreicher wissenschaftlicher Zahlenrechnungen sind in den letzten Jahren bei verschiedenen hierauf spezialisierten Instituten der ganzen Welt große Rechenanlagen entwickelt worden. Sie entstanden aus dem Bedürfnis, großes Beobachtungs- oder Zahlenmaterial automatisch zu verarbeiten, z. B. um experimentelle Erkenntnisse auszuwerten, iterative Nähe-

rungsmethoden anzuwenden, Probiervverfahren zu systematisieren usw. Im folgenden wird ein gedrängter Überblick über die damit zur Verfügung stehenden Geräte gegeben.

Hinsichtlich der Arbeitsweise kann man unterscheiden zwischen **ziffernmäßig rechnenden Maschinen** und **stetig arbeitenden Instrumenten**, je nachdem, ob die Rechnungsgrundlagen in Zahlenform verarbeitet werden — wie etwa bei den gewöhnlichen Rechenmaschinen — oder ob dies durch stetig wirkende Mechanismen geschieht, z. B. bei modellartigen Geräten oder bei Planimetern.

Bei den **ziffernmäßig rechnenden Maschinen** hat die Entwicklung von den gewöhnlichen Rechenmaschinen über automatisierte Buchungsmaschinen und über Hollerith-Lochkartenmaschinen zu Rechenautomaten geführt, die nach einem jeweils vorher bereitgestellten Programm verwickelte Berechnungen völlig selbsttätig ausführen. Wesentliche Bestandteile sind dabei die eigentlichen Recheneinrichtungen für die Grundrechnungsarten (Addieren, Multiplizieren usw.), ferner ein möglichst großer Vorrat von Speicherwerken zum Aufnehmen der Anfangszahlenwerte, der Zwischenergebnisse und der Endresultate, schließlich eine Kommandoanlage zum Steuern des Rechenablaufs (Programms). Die Recheneinrichtungen und Speicherwerke arbeiten meist elektromechanisch mit relaisartigen Teilen; bei den schnellsten Geräten (insbesondere dem ENIAC) werden Elektronenröhrenschalter benutzt, wodurch z. B. eine Addition in 0,0002 Sek., eine Multiplikation in 0,003 Sek. ausgeführt werden kann. Als Kommandogeber dient entweder ein Lochstreifen, der schrittweise abgetastet wird, oder eine Kombination von Röhrenschrittschaltern. Einzelheiten der verschiedenen Entwicklungen können hier nicht besprochen werden.

Als Beispiel für umfangreiche **stetig arbeitende Instrumente** seien die Differentialgleichungs-Integrieranlagen genannt. „Klassische Anlage“ ist hier der Differential-Analyzer von V. B u s h im Massachusetts-Institute of Technology. Er wurde von seiner früheren Form aus mehrfach weiter entwickelt, sowohl von V. B u s h selbst wie auch in Deutschland. Die wesentlichsten Elemente sind Integriergeräte, ferner Addier- und Multipliziergeräte, Eingangs- und Ergebnis-Funktionstische und eine mechanische oder elektrische Verkopplungsanlage. Die entsprechend verkoppelten Elemente bilden die zu lösende Differentialgleichung nach; die Ergebniskurve wird zeichnerisch oder auch gedruckt in Tabellenform geliefert. Die Fortentwicklung bezieht sich — abgesehen von Erhöhung der Genauigkeit — in erster Linie auf Einrichtungen, die das Arbeiten mit der Anlage schneller und bequemer machen: selbsttätiges Abtasten gezeichneter Kurven, Lochstreifensteuerung für das Verkopplern der Einzelgeräte, für das Eingeben der Anfangswerte und der Anpassungsmaßstäbe usw.

Ein **Vergleich beider Gerätearten** im Hinblick auf die weitere Entwicklung zeigt überwiegende Vorteile der ziffernmäßig rechnenden Maschinen, zumindest für große Anlagen. Vor allem kann eine ziffernmäßig arbeitende Maschine für beliebig hohe G e n a u i g k e i t gebaut werden; etwa 10 zählende Ziffern mit einer geeigneten Zehnerpotenz für die Größenordnung scheinen sich als günstig herauszuarbeiten. Bei stetig arbeitenden Instrumenten läßt sich hingegen wegen der modellmäßigen Darstellung der Rechengrößen die Genauigkeit kaum über $0,1\text{‰}$ steigern. Die A r b e i t s g e s c h w i n d i g k e i t der mit Röhrenschaltern arbeitenden Maschinen ist so groß, daß beispielsweise die numerische Lösung einer Differentialgleichung nach einem Iterationsverfahren — auch bei der für hohe Genauigkeit erforderlichen großen Schrittzahl — wesentlich schneller gewonnen wird als bei dem neuesten B u s h schen Differential-Analyzer. In der D o k u m e n t a t i o n der Ergebnisse in Kurven- oder Tabellenform besteht zwischen beiden Gerätearten kein grundsätzlicher Unterschied. Trotz den Vorteilen ziffernmäßig rechnender Maschinen werden kleinere stetige Anlagen mit verhältnismäßig spezieller Verwendung, etwa für harmonische Analyse oder zum Auflösen algebraischer Gleichungen, ihre Bedeutung durchaus behalten, da sie meist einfacher und anschaulicher arbeiten und an die Rechenvorbereitung geringere Anforderungen stellen.

Karlsruher Mathematiker vor 1914 und ihre heutige Nachwirkung.

Von Wilhelm Lorey in Frankfurt a. Main.

Gestützt auf persönliche Erinnerungen sowie auf Aktenstudien für seine historisch-mathematischen Arbeiten [1] und auf die von anderen verfaßten Nachrufe hat Verfasser folgende Mathematiker kurz charakterisiert:

Christian W i e n e r, geb. 17. 12. 1826 in Darmstadt, gest. 31. 7. 1896 in Karlsruhe.
 Alfred C l e b s c h, geb. 19. 8. 1831 in Königsberg, Ostpr., gest. 7. 12. 1872 in Göttingen.
 Wilhelm S c h e l l, geb. 31. 10. 1826 in Fulda, gest. 13. 2. 1904 in Karlsruhe.
 Ernst S c h r ö d e r, geb. 25. 11. 1841 in Mannheim, gest. 16. 6. 1902 in Karlsruhe.
 Adolf K r a z e r, geb. 15. 4. 1858 in Zusmarshausen/Bayern, gest. 7. 8. 1926 in Karlsruhe.
 Karl H e u n, geb. 3. 4. 1859 in Wiesbaden, gest. 10. 1. 1929 in Karlsruhe.

Paul Stäckel, geb. 20. 8. 1862 in Berlin, gest. 12. 12. 1919 in Heidelberg.

Friedrich Schur, geb. 27. 1. 1856 in Maciejewo, ehem. preuß. Prov. Posen, gest. 18. 3. 1932 in Breslau.

Peter Treutlein, geb. 26. 1. 1845 in Wieblingen bei Heidelberg, gest. 26. 7. 1912 in Karlsruhe.

Die Geburtsorte sind also über ganz Deutschland zerstreut, was für die Berufungen an deutsche Hochschulen charakteristisch war und hoffentlich auch so bleibt [2].

Vierzig Jahre hat Christian Wiener in Karlsruhe gewirkt. An der Universität Gießen hat er Baufach studiert, was damals dort möglich war. Anschließend wirkte er einige Jahre an der Gewerbeschule in Darmstadt, durch deren Direktor K ü l p er erst richtig in darstellende Geometrie eingeführt wurde, die in Gießen noch nicht vertreten war. K ü l p, ein geborener Mannheimer, hatte in Belgien bei Q u e t e l e t studiert und dort u. a. M o n g e s Schriften kennengelernt; in seinem der Gießener Fakultät bei der Meldung zur Promotion eingereichten ausführlichen Studiengang bezeichnet K ü l p die darstellende Geometrie als Poesie der Mathematik. W i e n e r hat sich in Gießen habilitiert, aber bald nach Karlsruhe umhabilitiert, wo er nach einem Jahr das Ordinariat erhielt. Die Hochschule besaß viele von ihm geschaffene Modelle, wie sie später sein Sohn Hermann, Professor an der TH. Darmstadt, erweitert hat. Die Vielseitigkeit W i e n e r s und seine Persönlichkeit läßt der ausführliche Nachruf erkennen, den ihm sein Neffe und Schüler A l e x a n d e r Brill, zusammen mit dem einstigen Karlsruher Physiker S o h n c k e, später TH. München, gewidmet hat [3].

Mit C l e b s c h kam 1858 für vier Jahre ein Mathematiker der Königsberger Schule nach Karlsruhe, der hier seine Elastizitätstheorie veröffentlichte. Auf C l e b s c h geht die Gründung des Karlsruher mathematischen Kränzchens zurück. Von Gießen aus hat C l e b s c h eine Mathematikerversammlung in Form einer Wanderung angeregt. Auf der ersten 1868 an der Bergstraße, an der auch Christian Wiener teilgenommen hat, sind die mathematischen Annalen entstanden.

Ein ganz anderer mathematischer Typ ist der Logistiker E r n s t S c h r ö d e r, dessen Nachlaß jetzt im logistischen Seminar in Münster aufbewahrt wird. Das Thema seiner geistvollen Karlsruher Rektoratsrede von 1890 über das Zeichen charakterisiert ein S c h r ö d e r s c h e s Ideal, dessen Verwirklichung, wie L ü r o t h im Nachruf [4] sagt, „zur Zeit dahingestellt bleiben muß“. Erwähnt sei aber die Bemerkung L ü r o t h s, die er schon 1897 S c h r ö d e r mitgeteilt hat, daß die Bindung der Weichen und Signale in den Stellwerken der Bahnhöfe ein Beispiel für den Logikkalkül abgibt. S c h r ö d e r war in Karlsruhe als Radfahrer sehr bekannt [5].

Viele Jahre hat der aus Marburg als C l e b s c h ' Nachfolger berufene Wilhelm Schell die Professur der Mechanik und synthetischen Geometrie innegehabt. Sein Hauptwerk „Theorie der Bewegung und der Kräfte“ war das erste ausführliche deutsche Lehrbuch der Mechanik. Besonderes Verdienst hat sich S c h e l l um die Bibliothek der TH. erworben [6]. S c h e l l war auch musikalisch sehr tätig und als Orgelspieler berühmt. Seine letzte Veröffentlichung, ein Vortrag im Karlsruher naturwissenschaftlichen Verein, handelt von Glocken und ihren Tönen. Seine Theorie „der Kurven doppelter Krümmung“, für die er schon die dritte Auflage geplant hatte, konnte erst kurz vor 1914 durch S a l k o w s k i neu herausgegeben werden.

Mit dem 1902 berufenen Straßburger a. o. Professor A d o l f K r a z e r kam ein Schüler P r y m s (Würzburg) und damit wissenschaftlich ein Enkel R i e m a n n s als Mathematiker an die TH., der ohne Konzessionen mit Entschiedenheit den Eigenwert der reinen Mathematik auch gern vor einem größeren Kreise betonte, wofür seine Rektoratsrede von 1908 „Zur Geschichte des Umkehrproblems der Integrale“ [7] charakteristisch ist. Seine sehr sorgfältig vorbereiteten Vorlesungen waren aber sehr geschätzt. Welche Verdienste K r a z e r sich in Verwaltungsfragen und in der Sorge um die Studenten erworben hat, sowie seine ganze Persönlichkeit läßt die ausführliche Gedenkrede erkennen, die K. B ö h m am 12. 2. 1927 vor einer zahlreichen und vielseitigen Zuhörerschaft in der voll besetzten Aula der TH. gehalten hat [8]. K r a z e r hat die Zusammenkünfte der südwestdeutschen Mathematiker um die Pfingstzeit in Baden-Baden organisiert. Als langjähriger Schriftleiter der deutschen Mathematikervereinigung hat er auch große Verdienste [9]. Mitarbeiter an der Herausgabe der E u l e r s c h e n Werke wollte er E u l e r s Briefwechsel übernehmen, eine Aufgabe, für die er besonders geeignet war. An K r a z e r s c h e Arbeiten über Thetafunktionen hat in der neuesten Zeit S i e g e l angeknüpft.

In den 12 Jahren, in denen F r i e d r i c h S c h u r in Karlsruhe gewirkt hat, ist seine Rektoratsrede über L a m b e r t als Geometer entstanden [10], die ich hier gerne anführe, weil ich durch sie zur eigenen L a m b e r t f o r s c h u n g veranlaßt wurde [11]. S c h u r s Wirken als Karlsruher Professor, insbesondere in der darstellenden Geometrie, und seine Persönlichkeit lassen die feinsinnigen Erinnerungen erkennen, die G e o r g F a b e r für den ausführlichen Nachruf E n g e l überlassen hat [12]. Zu den Assistenten S c h u r s gehörte auch der aus Danzig geflüchtete, bald 80 jährige F r i e d r i c h S c h i l l i n g. Als S c h u r im November 1918 Straßburg verlassen mußte und bei Kehl deutschen Boden betrat, empfing ihn eine neue Berufung nach Karlsruhe,

aber nahezu gleichzeitig eine Berufung nach Breslau, der er folgte. Die Karlsruher TH. hat ihn aber wegen seiner Verdienste um die Hochschule 1925 zum Ehrendoktor ernannt.

Karl Heun ist nach längerer Berliner Schultätigkeit nach Karlsruhe berufen worden, vor allem wohl auf Grund seines ausgezeichneten großen Referates im Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung „Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik“ [13]. Seine Antrittsrede vom 2. 12. 1902 zur Übernahme der Professur für theoretische Mechanik behandelt die Einwirkung der Technik auf die Entwicklung der theoretischen Mechanik [14]. Die Vorarbeiten für einen von seinem Schüler Georg Hamel geplanten ausführlichen Nachruf sind leider durch Bombenangriff vernichtet worden. Paul Stäckel, dessen anregenden Vorlesungen aus seiner Halleschen Privatdozentenzeit Anfang der 90er Jahre ich mich gern erinnere, hat in seiner Karlsruher Zeit die tatkräftige Mitarbeit an Eulers Werken begonnen. Er war auch fördernd sehr interessiert an den organisatorischen Fragen des Studiums und Unterrichts. Das ist aus seiner Rektoratsrede von 1910 erkenntlich, „Geltung und Wirksamkeit der Mathematik“ [15]. In Stäckels Wohnung fand am 31. 12. 1909 eine Besprechung statt, veranlaßt durch die geplanten Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, die im Interesse der 1908 in Rom gegründeten internationalen mathematischen Unterrichtskommission IMUK zu liefern waren. An dieser Besprechung nahmen u. a. Felix Klein, der Engländer Greenhill und der Karlsruher Realgymnasialdirektor Peter Treutlein teil. Dieser sollte im Sommer 1912 als deutscher IMUK-Vertreter am internationalen Mathematikerkongreß in Cambridge teilnehmen. Am Tag der Abreise ist er plötzlich gestorben. Was Peter Treutlein für die neuzeitliche Gestaltung des mathematischen Unterrichts, insbesondere der Geometrie, bedeutet, und seine wundervolle Persönlichkeit hat Paul Stäckel im Nachruf [16] geschildert. Von der Existenz der IMUK, die auf Anregung des Amerikaners D. E. Smith gegründet wurde, scheint man in maßgebenden amerikanischen Kreisen heute nichts zu wissen, wie aus gänzlich unzutreffenden Bemerkungen in der amerikanischen Denkschrift über die Erziehung in Deutschland [17] sich ergibt.

Schrifttumsverzeichnis.

- [1] W. Lorey: Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten im 19. Jahrhundert. IMUK III, 9 (1916).
Die Mathematik an der Universität Gießen im 19. Jahrhundert. Nachrichten der Gießener Hochschulgeseilschaft Bd. 11, Heft 2 (1936).
Aus der mathematischen Vergangenheit Marburgs. Noch nicht gedruckt.
Edmund Kulp, ein Korrespondent Abels. Noch nicht gedruckt.
- [2] Das betont auch die Beschwerde der naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät der Universität München beim bayrischen Ministerrat über den bayrischen Kultusminister, der einen außerhalb Bayerns geborenen für ein Ordinariat ausersesehenen theoretischen Physiker nicht bestätigen will. Neue Zeitung, April 1947.
- [3] Jahresbericht DMV 6 (1899). Zur 100. Wiederkehr des Geburtstages von Christian Wiener hat sein Sohn, der Physiker Otto Wiener, in den „Naturwissenschaften“ einen Gedenkaufsatz veröffentlicht (1926).
- [4] Nachruf mit Bild. Jahresbericht DMV 12 (1909), S. 249—265.
- [5] Wie Schröder von der Polizei entgegen dem allgemeinen Verbot genehmigt wurde, freihändig zu fahren, hat Herr v. Sanden in der Aussprache über den Vortrag aus seiner Erinnerung erzählt.
- [6] Nachruf mit Bild verfaßt von Lüröth, Jahresbericht DMV 14 (1905), S. 113—131 und die in Anm. 1 genannte Arbeit über Marburg.
- [7] Jahresbericht DMV 18 (1909).
- [8] Jahresbericht DMV 37 (1928), S. 1—33 mit Bild.
- [9] Nachruf vom Verlag B. G. Teubner und Schriftleitung.
Jahresbericht DMV 35 (1926), 2. Abt., S. 81.
- [10] Jahresbericht DMV 13 (1905), S. 186—198.
- [11] W. Lorey: Johann Heinrich Lambert, Gedenkrede, bei der von der Berliner mathematischen Gesellschaft veranstalteten Feier zur 200. Wiederkehr des Geburtstages von Lambert. BMG Sitzungsberichte XXVIII, S. 2—27.
- [12] Jahresbericht DMV 45 (1935), S. 1—31. Fabers Erinnerung, S. 28.
- [13] Jahresbericht DMV 9,2 (1901), VI + 123 S.
- [14] Jahresbericht DMV 12 (1901), S. 389—398.
- [15] Jahresbericht DMV 20 (1911), S. 117—128. Nachruf auf Stäckel von W. Lorey: Z. M. N. U (1921), der bald nach Stäckels Tod von seinen nächsten Freunden F. Engel, A. Gutzmer, A. Krause, F. Rudio und L. Schlesinger gefaßte Beschluß „seiner vielseitigen und fruchtbaren Lebensarbeit, seinen wertzeichnenden Plänen und Entwürfen sowie seiner feinen und lebenswürdigen Persönlichkeit eine Gesamtwürdigung zu widmen“, hat sich wegen der ungünstigen Zeitumstände nicht verwirklichen lassen. Im Jahresbericht DMV 32 (1922), S. 13—32 (mit Bild) hat Rudio aber „Paul Stäckels Verdienste um die Gesamtausgabe der Werke von Leonhard Euler“ dargestellt.
- [16] Jahresbericht DMV 21 (1912), S. 384—386 mit Bild.
- [17] Erziehung in Deutschland, Berichte und Vorschläge der amerikanischen Erziehungskommission. Herausgeber: Die Neue Zeitung. München, S. 39: „Die Lehrer und die Schulverwaltungsleute in den höheren Schulen und in den Ministerien sind für eine kritische Stellungnahme zu ihrer eigenen Lehrweise oder zu den Lehrplänen, die sie anbieten, nicht geschult. Der Unterricht läuft weiter von Geschlecht zu Geschlecht, unberührt von den Ergebnissen der pädagogischen Forschung und des Schulversuchs in anderen Ländern.“

C. Strömungslehre.

Zur Grenzschichtentstehung an Zylindern bei Anfahrt aus der Ruhe.

Von H. Görtler in Freiburg i. Br.

Während der vier Jahrzehnte seit Begründung der Grenzschichttheorie durch L. P r a n d t l ¹⁾ ist die Theorie der stationären Grenzschichten in einer sehr großen Reihe von Arbeiten gefördert und erprobt worden, dagegen haben die Fragen des instationären Verhaltens der Grenzschichten verhältnismäßig wenig Beachtung gefunden. Man kennt für sie eine Reihe instruktiver partikulärer Integrale, und man weiß, daß sich gewisse für stationäre Grenzschichten entwickelte Berechnungsverfahren bei entsprechender Vermehrung des Rechenaufwandes auf instationäre Grenzschichten übertragen lassen. Darüber hinaus haben allgemeine Fragen des instationären Verhaltens, ja schon die mit der Entstehung der Grenzschichten bei Bewegungen aus der Ruhe heraus verbundenen interessanten Probleme seit der bekannten ersten Göttinger Dissertation zur Grenzschichttheorie von H. B l a s i u s ²⁾ nur vereinzelt Interesse gefunden, zuletzt in meiner Untersuchung ³⁾ über die Entstehung des Druckwiderstandes, in der auch weitere Literatur genannt ist.

B l a s i u s hat für die Fälle a) des ruckartigen Übergangs eines Körpers aus der Ruhe in die gleichförmige Bewegung und b) der gleichförmigen Beschleunigung aus der Ruhe Lösungsansätze gegeben. Sie lassen sich formal auf beliebige Fahrgeschwindigkeiten aus der Ruhe verallgemeinern, sofern sich diese nur in Reihen nach ganzen Potenzen der Fahrzeit t entwickeln lassen ³⁾. Im folgenden beschränken wir uns auf Fahrgeschwindigkeiten $U(t) = C t^n$ ($C = \text{const}$, $n \geq 0$ ganzzahlig). Eine wesentliche Voraussetzung der B l a s i u s schen Ansätze und ihrer Verallgemeinerungen ist die Beschränkung auf so kleine Fahrzeiten, daß die entstehende Grenzschicht die äußere Potentialströmung noch nicht merklich beeinflusst, d. h. daß als äußere Potentialströmung die Potentialströmung um den Körper selbst den Rechnungen zugrunde gelegt werden darf. Wie man über diese Voraussetzung hinauskommt und für größere Fahrzeiten die wachsende Verdrängungswirkung der Grenzschichten auf die äußere Potentialströmung berücksichtigt, ist gerade das besondere Anliegen meiner oben genannten Arbeit ³⁾. Damit erst wird es möglich, den entstehenden Druckwiderstand streng zu berechnen. Im folgenden mögen jedoch die Fahrzeiten klein im Sinne der B l a s i u s schen Voraussetzung sein.

Die Berechnung der universellen Beiwertfunktionen zu den verallgemeinerten B l a s i u s schen Reihenentwicklungen wurde fortgesetzt, auch für die leicht durchführbare Verallgemeinerung auf Fahrtrichtungen schräg zur Zylinderachse. Damit ist eine für die interessierenden Zeiten praktisch hinreichend genaue Berechnung der Strömungen, insbesondere der zeitlichen Wanderung der Ablösestelle ermöglicht. Zwar ergibt sich, wie diese Rechnungen zeigen, der Ort des Ablösungsbeginns im allgemeinen bereits in erster Näherung befriedigend genau, die Zeit T_A des Ablösungsbeginns und die zeitliche Abhängigkeit des wandernden Ablösungsortes dagegen erst in zweiter oder höherer Näherung. In spezieller Anwendung auf die nicht angestellte Ellipse ⁴⁾ mit dem Achsenverhältnis $m = b/a$ (Achse der Länge $2a$ liege in Fahrtrichtung) folgert man u. a. folgende Ergebnisse: Für $m \leq 2/\sqrt{3}$ beginnt die Ablösung im hinteren Staupunkt, für $m \geq 2/\sqrt{3}$ an zwei dazu symmetrischen Stellen. Speziell für die B l a s i u s schen Fälle $n = 0$ und $n = 1$ ist dieses Gesetz in erster Näherung bereits von W. T o l l m i e n ⁵⁾ bewiesen worden. Es gilt jedoch für alle n und zwar mindestens in drei Näherungen genau, d. h. praktisch zuverlässig, wenn auch vermutlich nicht streng. Unter allen Ellipsen mit gleicher Achsenlänge $2a$ in Strömungsrichtung beginnt die Ablösung am spätesten an der Ellipse mit $m = 1,28$ ($> 2/\sqrt{3} = 1,15$). (Bei allen Aussagen über den Zusammenhang zwischen Ort und Zeit der Ablösung geht die Zähigkeit der Flüssigkeit nicht ein.)

Eine erstmalige experimentelle Prüfung der Theorie wurde mittels Schleppversuche in einem Wasserkanal durchgeführt, wobei die Bewegung von auf der Wasseroberfläche ausgestreuten Al-Teilchen (Methode von A h l b o r n) von einer mit dem geschleppten Zylinder mitfahrenden Kamera kinematographisch festgehalten wurde. Der elektrische Schleppantrieb gibt eine gute Nachbildung des Falles $n = 0$ (Beschleunigungszeit klein gegenüber den interessierenden Fahrzeiten der Größenordnung von T_A). Nach diesen Messungen setzt die Ablösung örtlich und zeitlich in guter Übereinstimmung mit der Theorie ein. Im Falle $m = 1/2$ wird der Ort der nach vorn wandernden Ablösestelle in seiner Abhängigkeit von der Zeit noch für Zeiten gut wiedergegeben,

¹⁾ L. Prandtl: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verh. d. III. Intern. Math. Kongresses. Leipzig 1905. Neudruck in Prandtl-Betz: Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik. Göttingen 1927.

²⁾ H. Blasius: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. Phys. 56 (1908), S. 1–37.

³⁾ H. Görtler: Verdrängungswirkung der laminaren Grenzschichten und Druckwiderstand. Ing.-Arch. 14 (1944), S. 286–305.

⁴⁾ Während des Vortrags wurden Ergebnisse in einer Reihe von Diagrammen vorgeführt und diskutiert.

⁵⁾ W. Tollmien: Grenzschichttheorie. Hb. Experimentalphysik, Bd. 4, 1. Teil. Leipzig 1931. S. 275, 279.

die das Dreifache der Ablösungszeit T_A betragen, für Zeiten also, in denen die äußere Potentialströmung bereits erheblich von der theoretisch angenommenen abweicht. Bei dickeren Zylindern (Messungen wurden noch für $m=1$ und $m=2$ durchgeführt) zeigen sich systematische Abweichungen zwischen Theorie und Experiment zwar bereits etwas früher, aber immer noch erst erheblich später als erwartet werden mußte.

Über einige Untersuchungen an turbulenten Reibungsschichten.

Von K. Wieghardt in Göttingen.

Es wurde über Messungen an ebenen, stationären turbulenten Reibungsschichten berichtet, die in den letzten Jahren durchgeführt worden waren [1, 2, 3]. Die von Gruschwitz [4] gefundene näherungsweise Einparametrigkeit der Geschwindigkeitsprofile bei beliebigem Druckverlauf wurde immer gut bestätigt, selbst bei rauher Oberfläche sowie hinter starken Störungen wie z. B. einer Stolperleiste. Alle diese Profile befolgen in Wandnähe außerhalb der laminaren Unterschicht mehr oder weniger weit in die Reibungsschicht hindurch ein Potenzgesetz $u/U \sim (y/\delta)^{1/7.7}$ (u = mittlere Geschwindigkeit in der Schicht, U = Geschwindigkeit außerhalb der Schicht, y = Wandabstand, δ = Impulsverlustdicke), obwohl die Turbulenzverhältnisse (z. B. die Schubspannungsprofile) nicht ähnlich sind. Aus der Prandtl'schen Grenzschichtgleichung kann analog dem Impulssatz ein Energiesatz für Reibungsschichten abgeleitet werden: Arbeit der Schubspannungen pro Zeiteinheit = Verlust an kinetischer Energie pro Längeneinheit quer zur

Strömungsrichtung, also
$$-\int_0^\delta u \frac{\partial \tau}{\partial y} dy = \int_0^\delta \tau \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u \left(\frac{1}{2} U^2 - \frac{1}{2} u^2 \right) dy, \text{ wo } \delta = \text{Reibungsschichtdicke, } x = \text{Koordinate in Strömungsrichtung und } \rho = \text{Dichte.}$$

Mit diesem Energiesatz, dem Impulssatz und wegen der Einparametrigkeit der u/U -Profile kann eine Differentialgleichung für $\eta(x)$ aufgestellt werden, die der empirischen von Gruschwitz entspricht. Über die darin vorkommenden dynamischen Größen: Wandschubspannung τ_0 sowie über die Arbeit der Schubspannungen können jedoch mangels eines ausreichenden Ansatzes für die turbulenten Schubspannungen keine weiteren Aussagen gemacht werden. — Bei starkem Druckanstieg steigt die Wandschubspannung τ_0 nach den Versuchen überraschenderweise kurz vor der zu erwartenden Ablösung auf ein Mehrfaches des ursprünglichen Wertes an, was unabhängig auch W. Mangler [5] aus den Kehl'schen Messungen [6] ableitete. Dieser Effekt tritt auch bei rauher Oberfläche und bei künstlich erhöhter Turbulenz außerhalb der Reibungsschicht auf, sowie bei Berücksichtigung der durch die Reibungsschichten längs der Seitenwände des Meßkanals verursachten seitlichen Konvergenz der Strömung [7]. Eine ausreichende Erklärung des Effektes fehlt noch; er tritt

nicht ein, solange $\left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{dU}{U} \right| < 1 \cdot 10^{-3}$ bleibt. — In Hinblick auf meteorologische Anwendungen wurde ferner die Wärmeausbreitung hinter einer punkt- oder linienförmigen schwachen Wärmequelle am Boden (Wand) einer turbulenten Reibungsschicht ausgemessen und in ein Formelsystem zusammengefaßt (vgl. hierzu eine inzwischen erschienene englische Arbeit [8]).

Schrifttumverzeichnis.

- [1] K. Wieghardt: Über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten bei veränderlichem Außendruck. UM 6603 (1943).
- [2] K. Wieghardt und W. Tillmann: Zur turbulenten Reibungsschicht bei Druckanstieg. UM 6617 (1944).
- [3] K. Wieghardt: Über Ausbreitungsvorgänge in turbulenten Reibungsschichten. Bericht des Marineobservatoriums Nr. 6 (1944).
- [4] E. Gruschwitz: Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung bei Druckabfall und Druckanstieg. Ing.-Arch. 2 (1932), S. 321.
- [5] W. Mangler: Das Verhalten der Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten mit Druckanstieg. UM 3052 (1944).
- [6] A. Kehl: Untersuchungen über konvergente und divergente turbulente Reibungsschichten. Ing.-Arch. 13 (1943), S. 293.
- [7] W. Tillmann: Über die Wandschubspannung turbulenter Reibungsschichten bei Druckanstieg. Diplomarbeit Göttingen 1947.
- [8] B. Frost: Turbulence and diffusion in the lower atmosphere. Proc. Roy. Soc. London A, 186 (1946), S. 20.

Laminare Strömung Newtonscher und Maxwell'scher Flüssigkeiten.

Von Hans Fromm in Alzey.

1. Das Stoffgesetz.

Bei Newton'schen Flüssigkeiten von der Viskosität η ist die Schubspannung τ der Schiebgeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ proportional ($\tau = \eta \dot{\gamma}$). Sie sind schubelastisch steif ($G = \infty$).

In Maxwell'schen Flüssigkeiten mit dem Schubmodul G (Relaxationszeit $T = \eta/G$) bringt auch die Drehung des Stoffes unter einem im Raume konstanten Spannungszustande elastische Verformungsänderungen hervor. Zu deren Erfassung ist es erforderlich, auf die allgemeinen Tensorbeziehungen zurückzugreifen.

Verformungs- und Spannungstensor haben die Komponenten:

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_m + \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_m + \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_m + \varepsilon_z \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{P} = \begin{pmatrix} \sigma_m + \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_m + \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_m + \sigma_z \end{pmatrix},$$

deren Analyse in Kugeltensor und Deviator (Gestalter) durch

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_m \cdot \mathfrak{E} + \mathfrak{D}_0; \quad \mathfrak{P} = \sigma_m \cdot \mathfrak{E} + \mathfrak{P}_0$$

zum Ausdruck kommt, wenn \mathfrak{E} den Idemfaktor bedeutet. Der zu \mathfrak{D} antisymmetrische Drehtensortensor sei durch den Drehwinkel $\bar{\varphi}$ gekennzeichnet. Für die zeitliche Ableitung gilt nun in bekannter Weise

$$\dot{\mathfrak{D}} = \frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \mathfrak{s}} \cdot \frac{d\mathfrak{s}}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \bar{\omega} (\omega_x, \omega_y, \omega_z),$$

worin \mathfrak{s} die Verschiebung und $\bar{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit bedeuten. Andererseits aber ist¹⁾

$$\dot{\mathfrak{P}} = \frac{d\mathfrak{P}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \mathfrak{s}} \frac{d\mathfrak{s}}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \bar{\varphi}} \cdot \bar{\omega} \quad (1),$$

worin $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \bar{\varphi}} \cdot \bar{\omega} = \Pi_x \cdot \omega_x + \Pi_y \cdot \omega_y + \Pi_z \cdot \omega_z$.

Darin sind Π_x, Π_y, Π_z drei Deviatoren, z. B. $\Pi_z = \begin{pmatrix} 2\tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_x & \tau_{yz} \\ \sigma_y - \sigma_x & -2\tau_{xy} & -\tau_{xz} \\ \tau_{yz} & -\tau_{xz} & 0 \end{pmatrix}$.

Es ist beachtenswert, daß dieses dritte Glied in $\dot{\mathfrak{D}}$ nicht vorkommen kann; der Einfluß der Drehung ist hier in $\bar{\omega}$ abgesondert.

Das Maxwell'sche Stoffgesetz läßt sich nun in besonders anschaulicher Weise als eine Überlagerung einer elastischen Verformung nach Hooke und einer Fließverformung nach Newton unter dem gleichen Spannungszustande \mathfrak{P} auffassen. Aus

$$\mathfrak{D}_e = \frac{\sigma_m}{3K} \cdot \mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{P}_0}{2G} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_f = \frac{\sigma_m}{3\zeta} \cdot \mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{P}_0}{2\eta}$$

(K = Kompressionsmodul; ζ = Kompressionszähigkeitswert, der meistens stillschweigend unendlich groß angenommen wird) folgt also

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_e + \mathfrak{D}_f = \left(\frac{\sigma_m}{3K} + \frac{\sigma_m}{3\zeta} \right) \cdot \mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{P}_0}{2G} + \frac{\mathfrak{P}_0}{2\eta} \quad (2).$$

2. Stationäre ebene Strömung mit homogener Verformung.

In der stationären Strömung ist $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} = 0$ und bei Homogenität der Verformung auch $\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \mathfrak{s}} = 0$ und $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \mathfrak{s}} = 0$. Legt man die z -Achse senkrecht zur Strömungsebene und läßt die x, y -Achsen im Augenblick die Hauptrichtungen von \mathfrak{D} halbieren, so erhält man aus (2) mit

$$\omega_z = \bar{\omega} = \text{konst}; \quad \dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma} = \text{konst} \quad (3)$$

$$\mathfrak{D}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \dot{\gamma} & 0 \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\omega}{2G} \cdot \Pi_z + \frac{1}{2\eta} \cdot \mathfrak{P}_0 \quad (4).$$

¹⁾ Über die Ableitung siehe: H. Fromm: Ing.-Arch. 4 (1933), S. 452.

Dies sind 5 Gleichungen, aus denen sich die 6 Spannungskomponenten des Deviators bestimmen lassen. Man findet für den Spannungszustand

$$\mathfrak{P} = \sigma_m \cdot \mathbb{E} + \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau & 0 \\ \tau & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{\eta \dot{\gamma}}{1 + (2T\omega)^2} \quad \dots \dots \dots (5).$$

und $\sigma_y = -\sigma_x = \tau \cdot (2T\omega)$

σ_m bleibt unbestimmt.

Die Schubspannung hängt also außer von $\dot{\gamma}$ noch von der Drehungsgeschwindigkeit ω ab. Außerdem ist bei Drehung der Spannungszustand nicht mehr mit der Verzerrungsgeschwindigkeit koaxial, wie das Auftreten der Deviatorspannungen σ_x und σ_y lehrt, die in Newtonscher Flüssigkeit mit T verschwinden.

Bei nicht stationärer ebener Strömung mit homogener Verformung erhält man mit $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \neq 0$ an Stelle von (4) ein System von Differentialgleichungen. Ist die Strömung kinematisch stationär ($\dot{\gamma}$ und ω auch zeitlich unveränderlich), also nur dynamisch instationär („reine Relaxationsströmung“), so sind die Gleichungen allgemein integrierbar. Bemerkenswert ist, daß einer Relaxation nach einer Exponentialfunktion eine solche nach abklingenden Schwingungen überlagert ist, welche die Frequenzen (2ω) bei σ_x , σ_y , τ_{xy} , dagegen ω bei τ_{yz} , τ_{zx} und Null bei σ_z haben. Der Grenzzustand der abgeklungenen Relaxationsströmung wird durch die stationäre Strömung nach (5) dargestellt.

3. Sonderfälle stationärer homogener Strömung.

a) **Reine Schiebung:** Mit $\omega = 0$ liegt die in Bild 1 dargestellte reine Schiebung ohne Drehung vor. Aus (5) folgt hierfür

$$\tau = \eta \cdot \dot{\gamma}; \quad \sigma_x = \sigma_y = 0 \quad \dots \dots \dots (6),$$

d. h. die Maxwell'sche Flüssigkeit unterscheidet sich dabei nicht von der Newton'schen, weil die elastischen Zusatzverzerrungen infolge Drehung des Spannungszustandes über den Stoff fehlen.

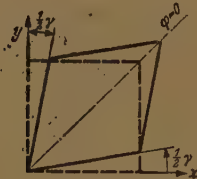


Bild 1.

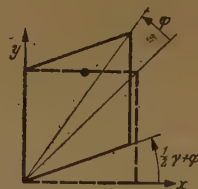


Bild 2.

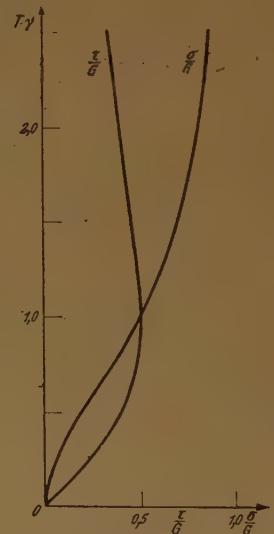


Bild 3.

b) **Laminare Strömung:** Mit $\omega = \frac{1}{2} \dot{\gamma}$ liegt die in Bild 2 dargestellte laminare Strömung parallel zur y -Achse vor. Aus (5) folgt hierfür

$$\frac{\tau}{G} = \frac{T\dot{\gamma}}{1 + (T\dot{\gamma})^2}; \quad \frac{\sigma_y}{G} = -\frac{\sigma_x}{G} = \frac{(T\dot{\gamma})^2}{1 + (T\dot{\gamma})^2} \quad \dots \dots \dots (7).$$

Der Verlauf dieser Funktionen²⁾ ist in Bild 3 dargestellt.

Abweichend vom Newton'schen Verhalten sind hier bei einer laminaren Strömung der hydrostatischen Spannung σ_m eine Zugspannung (σ_y) in Richtung der Strömung und eine Druckspannung ($-\sigma_x$) senkrecht zur Strömung überlagert, die schwächer als quadratisch mit $\dot{\gamma}$ wachsen und dem Schubmodul als Grenzwert zustreben. Die Schubspannung τ aber erreicht bei $\dot{\gamma}_H = \frac{1}{T} = \frac{G}{\eta}$ ein Maximum $\tau_H = \frac{G}{2}$ und nimmt mit weiter wachsendem $\dot{\gamma}$ asymptotisch wieder auf Null ab. Die Zustände im Gebiet $T \cdot \dot{\gamma} > 1$ dürften als labil zu bezeichnen sein, so daß man von einer „Turbulenz zweiter Art“ sprechen kann.

²⁾ Dies ist ein Sonderfall des schon früher behandelten allgemeineren Problems des zähplastischen laminaren Strömens. Vgl. H. Fromm: a. a. O., S. 454. — Dort befindet sich gerade in der der Gl. (7) entsprechenden Formel ein Versehen, indem dort der Wurzelausdruck bei $\frac{1}{2} \dot{\gamma}$ im Nenner, bei τ im Zähler stehen muß. Ferner muß es dort auf S. 436 in der letzten Textzeile heißen: deviator-art-gleich \equiv koaxial + ähnlich.

Für ein Öl mit $\eta = 1$ Poise; $G = 460$ dyn/cm²; $T = 0,0022$ sk wird also $\tau_H = 230$ dyn/cm² und tritt bei $\dot{\gamma}_H = 454$ sk⁻¹ auf. Bei einer Schichtdicke von 1 mm würde also Labilität zu erwarten sein, wenn die Relativgeschwindigkeit der Wände 45,4 cm/sk überschreitet.

4. Stationäre Parallel-Strömung im Rohr mit Kreisquerschnitt.

a) **Berechnung:** Die stationäre Strömung erfordert hier ein Druckgefälle in Strömungsrichtung. Bei Annahme von Inkompressibilität besteht durchweg parallele Laminarströmung.

In Zylinderkoordinaten liege y achsial in Strömungsrichtung, x radial, a sei der Radius des Rohres. Die Strömung ist nicht homogen; statt (3) ist

$$2\omega(x) = \dot{\gamma}(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x} \quad (8)$$

von x abhängig, aber von y unabhängig. Trotzdem bleibt $\frac{\partial \mathfrak{P}_0}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} = 0$, also bei stationärer Strömung behalten (4) und (5) mit den Lösungen (6) und (7) Gültigkeit. So folgt aus $\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial y} = 0$ auch

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \sigma_z = 0 \quad (9),$$

und die Gleichgewichtsbedingungen am Volumenelement liefern

$$\frac{\partial^2 \sigma_m}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_m}{\partial y^2} = 0 \quad (10, 11).$$

Es herrscht also im ganzen Strömungsfelde (x, y) gleiches Druckgefälle

$$f = \frac{\partial (\sigma_m + \sigma_y)}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_m}{\partial y} \quad (12),$$

und man findet

$$\tau = -\frac{f}{2} \cdot x \quad (13)$$

und unter Benutzung von (7)

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial x} = -f \cdot (T \dot{\gamma}) - \frac{f}{2} \cdot x \cdot \frac{\partial (T \dot{\gamma})}{\partial x} \quad (14).$$

Der Druck ist also bei Maxwell'schen Flüssigkeiten nicht gleichmäßig über den Rohrquerschnitt verteilt. — Die Stromstärke Q bzw. mittlere Geschwindigkeit v_m ergibt sich mit (8) zu

$$Q = \pi a^2 v_m = \int_0^a v \cdot dF = vF \Big|_0^a - \int_0^a F \cdot dv = 0 - \int_0^a \pi x^2 \cdot \dot{\gamma}(x) dx \quad (15).$$

Mit Hilfe von (7) findet man nun aus (8), (13) die Geschwindigkeitsverteilung, aus (15), (13) die Stromstärke und aus (14), (13) die Druckverteilung. Mit der Abkürzung

$$\xi = \frac{f}{G} x = -\frac{2\tau}{G}; \quad \alpha = \frac{f \cdot a}{G} = -\frac{2\tau_{\text{Rand}}}{G} \quad (16)$$

und der Hilfsfunktion

$$\varphi(\xi) = -\ln \xi \pm [\ln \xi - \ln(1 + \sqrt{1 - \xi^2}) + \sqrt{1 - \xi^2}] \quad (17)$$

lauten die Ergebnisse für die Maxwell'sche Flüssigkeit:

$$\text{Geschwindigkeitsverteilung: } w(\xi) = \frac{T}{G} f \cdot v(x) = \varphi(\xi) - \varphi(\alpha) \quad (18),$$

$$\text{Stromstärke: } q(\alpha) = v_m \cdot \frac{T}{a} = \frac{\alpha^2 \mp \frac{2}{3} [1 - (1 - \alpha^2)^{3/2}]}{2\alpha^3} \quad (19),$$

$$\text{Druckkomponenten: } \left. \begin{aligned} P_m = P_z &= -\frac{2}{G} \sigma_m = C - 2\alpha \frac{y}{a} + \varphi(\xi) \pm \sqrt{1 - \xi^2} \\ P_x &= -\frac{2}{G} (\sigma_m + \sigma_x) = (C + 1) - 2\alpha \frac{y}{a} + \varphi(\xi) \\ P_y &= -\frac{2}{G} (\sigma_m + \sigma_y) = (C - 1) - 2\alpha \frac{y}{a} + \varphi(\xi) \pm 2 \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \end{aligned} \right\} \quad (20).$$

Darin gelten die oberen Vorzeichen für den stabilen, die unteren für den labilen Bereich der Strömung.

b) Erörterung der Ergebnisse: In Bild 4 ist die Hilfsfunktion $\varphi(\xi)$ aufgetragen. Die Ordinate liegt in Rohrachse; der Radius (ξ) ist durch die Wandstellung (α) in Abhängigkeit von f begrenzt. Gemäß (18) stellt z. B. für $\alpha = 0,5$ die Fläche ABG die stabile, die Fläche FEH die labile Geschwindigkeitsverteilung dar. Für $\alpha = 1$ sind zwischen einer vollstabilen Verteilung (ACO) und einer vollabilen (FCO) beliebig viele geschichtete Strömungen (nach dem Muster $JDCO$) möglich, die neben einer stabilen Kernströmung eine labile Wandströmung zeigen. — Zum Vergleich ist die immer stabile Newtonsche Strömung (Parabel, $G = \infty$) eingetragen (in ξ und w ist hier G lediglich als Maßstabfaktor zu werten).

In Bild 5 ist die Stromstärke über dem Druckgefälle dargestellt. Bei $\alpha_{\max} = 1$ entspricht die Linie SL den geschichteten Strömungen.

Bild 6 zeigt schließlich die Druckkomponenten-Verteilung über $\xi \leq \alpha \leq 1$. Bei geschichteter Strömung sind die Integrationskonstanten C in beiden Schichten verschieden und zwar so, daß P_w dem Wechselwirkungsprinzip entsprechend stetig verläuft. Die Kurvenbilder sind also längs des Grenzradius ξ_g (Punkt D in Bild 4) so gegeneinander zu verschieben, daß dort für P_w der äußere labile Zweig an den inneren stabilen anschließt.

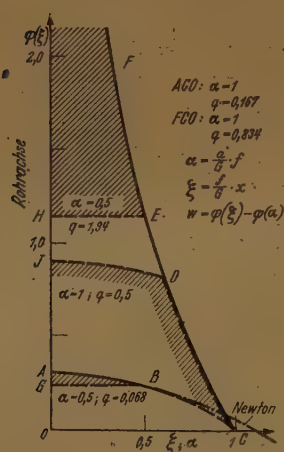


Bild 4.

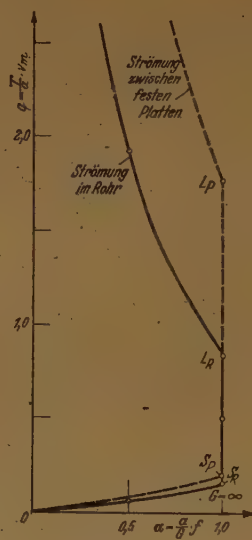


Bild 5.

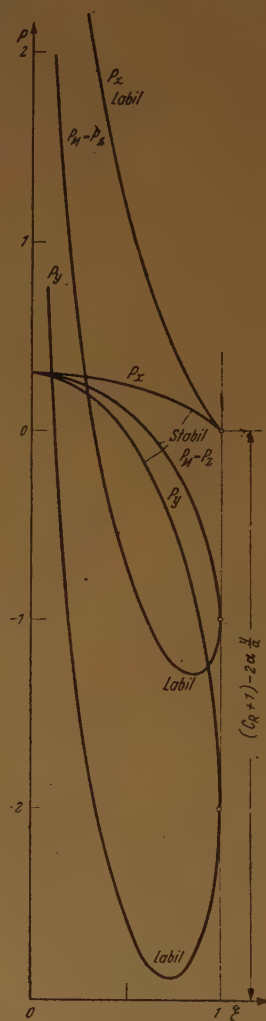


Bild 6.

5. Schlußbemerkung:

Wegen der Besonderheiten, die bei Druck- und Staudruckmessungen in Maxwell'schen Flüssigkeiten zu beachten sind, und wegen der Beziehungen, die man zur Strukturviskosität kolloidaler Lösungen sehen kann, besonders wenn man emulsive Gemenge verschiedener Maxwell'scher Flüssigkeiten in die Betrachtung zieht, sei auf die ausführliche Abhandlung verwiesen, die der Z. angew. Math. Mech. zum Abdruck eingereicht wurde.

Berechnung von Gasströmungen im Bereich der Schallgeschwindigkeit.

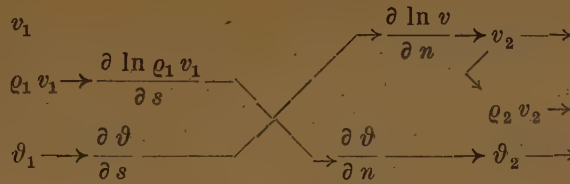
Von Albert Betz in Göttingen.

Für die Berechnung von Strömungen im Bereich der Schallgeschwindigkeit verwendet man zweckmäßig Beziehungen, welche beim Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit ihren Charakter nicht ändern im Gegensatz z. B. zur Gleichung des Strömungspotentials, die im Unterschallbereich vom elliptischen, im Überschallbereich vom hyperbolischen Typus ist. Eine solche Beziehung ergibt sich aus der Überlegung, daß sich bei nicht parallelen benachbarten Stromlinien die Stromdichte in Strömungsrichtung ändert, während bei gekrümmten Stromlinien ein Druckgefälle bzw. bei drehungsfreier Strömung eine Geschwindigkeitsänderung quer zur Strömungsrichtung auftritt. Bezeichnen v und ρ Geschwindigkeit und Dichte der Flüssigkeit, ρv also die Stromdichte, ϑ den

Winkel der Strömungsrichtung mit einer festen Achse und s und n die Erstreckung längs und quer zur Stromrichtung, so ergibt diese Überlegung folgende formelmäßigen Zusammenhänge:

$$\frac{\partial \ln \rho v}{\partial s} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial n}, \quad \frac{\partial \ln v}{\partial n} = \frac{\partial \vartheta}{\partial s},$$

welche bei Schallgeschwindigkeit keine Schwierigkeiten bieten. Dabei ist allerdings folgendes zu beachten: Die Stromdichte ρv ist als Funktion der Geschwindigkeit v bekannt. Sie hat bei der Schallgeschwindigkeit ein Maximum. Das hat zur Folge, daß in der Umgebung der Schallgeschwindigkeit einer verhältnismäßig großen Änderung der Geschwindigkeit v nur eine sehr kleine Änderung der Stromdichte ρv entspricht. Man erhält daher bei der Berechnung der Stromdichte aus der Geschwindigkeit sehr genaue Werte für ρv und umgekehrt sehr ungenaue bei der Berechnung von v aus ρv . Man muß deshalb möglichst von gegebenen Werten (1) längs einer Stromlinie ausgehen und daraus die Werte (2) auf der Nachbarstromlinie gemäß folgenden Schemas berechnen



Würde man von Werten längs einer Potentiallinie ausgehen, so würde man $\rho_2 v_2$ aus $\frac{\partial \vartheta}{\partial n}$ erhalten und daraus v_2 berechnen müssen.

Weitere Schwierigkeiten macht die Erfüllung der Randbedingungen bzw. das Auffinden von geeigneten Ausgangswerten und besonders das Auftreten von Verdichtungsstößen. Um hierüber Klarheit zu bekommen, habe ich zusammen mit Herrn Dr. K r a h n mit diesem Rechenverfahren die Strömung um einen Kreiszylinder bei einer Machzahl der Anströmung von 0,6 zu berechnen versucht, wobei sich bereits ein recht ausgedehntes Überschallgebiet ergibt. Wir gingen aus von einem Schnitt in Strömungsrichtung in solchem Abstand vom Zylinder, daß außerhalb die Strömung nach der P r a n d t l'schen Regel berechnet werden kann. Wichtig ist, daß man für die zunächst angenommene Geschwindigkeitsverteilung auf dieser Ausgangslinie von vornherein den stark erhöhten Platzbedarf der Strömung bei hohen Geschwindigkeiten berücksichtigt. Wir erreichten dies in erster Näherung durch Überlagerung einer Hexapolströmung zu der die inkompressible Strömung darstellenden Parallel- und Dipolströmung. Auch damit ergeben sich noch merkliche Abweichungen von der Kreisform. Typisch ist die Tendenz zu einer Ausbeulung in der Gegend, wo die Schallgeschwindigkeit durchschritten wird und zu einer starken Konzentration des Geschwindigkeitsgefälles in dieser Gegend. Es ist beabsichtigt, die Abweichungen von der Kreisform durch weitere Änderung der Ausgangsverteilung immer mehr zu beseitigen. Die starke Konzentration des Geschwindigkeitsgefälles wird aber bestehen bleiben und bei Steigerung der Machzahl zu einer singulären Stelle ausarten, so daß symmetrische Lösungen nicht mehr möglich sind. Es ist dann weiter beabsichtigt auch unsymmetrische Ansätze mit Verdichtungsstoß rechnerisch zu verfolgen.

Bemerkungen zur Charakteristikentheorie der partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Von R. Sauer in Weil a. Rhein.

Die lineare und in den zweiten Ableitungen homogene Differentialgleichung

$$a(x, y)f_{xx} + 2b(x, y)f_{xy} + c(x, y)f_{yy} = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

geht durch die Legendre-Transformation

$$\xi = f_x, \quad \eta = f_y, \quad \varphi = x\xi + y\eta - f, \quad x = \varphi_\xi, \quad y = \varphi_\eta \quad \dots \dots \dots (2)$$

über in

$$a(\varphi_\xi, \varphi_\eta)\varphi_{\xi\xi} - 2b(\varphi_\xi, \varphi_\eta)\varphi_{\xi\eta} + c(\varphi_\xi, \varphi_\eta)\varphi_{\eta\eta} = 0. \quad \dots \dots \dots (3).$$

Im hyperbolischen Bereich ($ac < b^2$) genügen die Charakteristiken $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ der Gln. (1) und (3) den Beziehungen

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\lambda=\text{const}} = -\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)_{\mu=\text{const}}, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\mu=\text{const}} = -\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)_{\lambda=\text{const}},$$

d. h. die Charakteristikennetze der x, y - und der ξ, η -Ebene sind orthogonal-reziprok aufeinander bezogen. Wenn daher das eine der beiden Netze ein Geradenetz ist, muß das andere Netz ein Rückungnetz (= ein von zwei Scharen kongruenter Kurven erzeugtes Parallelogrammnetz) sein. Auf Grund dieses einfachen geometrischen Zusammenhangs kann man in diesen Fällen die allgemeine Lösung von Gl. (1) bzw. (3) sofort explizit angeben:

I. Hyperbolischer Bereich ($ac < b^2$).

Im Fall (a) (x, y -Netz = Geradenetz, ξ, η -Netz = Rückungnetz) ergibt sich für die Charakteristiken und für die allgemeine Lösung

$$\left. \begin{aligned} x \cos \lambda + y \sin \lambda &= l(\lambda), & \xi &= \int [L(\lambda) \cos \lambda d\lambda + M(\mu) \cos \mu d\mu], \\ x \cos \mu + y \sin \mu &= m(\mu), & \eta &= \int [L(\lambda) \sin \lambda d\lambda + M(\mu) \sin \mu d\mu], \\ \varphi &= \int [l(\lambda) L(\lambda) d\lambda + m(\mu) M(\mu) d\mu] \end{aligned} \right\} \dots (4a).$$

Im Fall (b) (x, y -Netz = Rückungnetz, ξ, η -Netz = Geradenetz) gilt entsprechend

$$\left. \begin{aligned} x &= \int [l(\lambda) \cos \lambda d\lambda + m(\mu) \cos \mu d\mu], & \xi \cos \lambda + \eta \sin \lambda &= L(\lambda), \\ y &= \int [l(\lambda) \sin \lambda d\lambda + m(\mu) \sin \mu d\mu], & \xi \cos \mu + \eta \sin \mu &= M(\mu), \\ f &= \int [l(\lambda) L(\lambda) d\lambda + m(\mu) M(\mu) d\mu]. \end{aligned} \right\} \dots (4b).$$

Dabei sind $l(\lambda)$, $m(\mu)$ bestimmte, durch die Koeffizienten der Differentialgleichung (1) festgelegte, $L(\lambda)$, $M(\mu)$ dagegen willkürliche Funktionen.

Im Fall (a) ist $\varphi = \varphi(\xi, \eta)$ und im Fall (b) ebenso $f = f(x, y)$ eine Translationsfläche, die von den kongruenten Kurven $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ aufgespannt wird.

II. Elliptischer Bereich ($ac > b^2$).

Mit $e^{i\lambda} = \tau$, $e^{-i\mu} = \hat{\tau}$, $m = \hat{l}$, $M = \hat{L}$, $t = \int l d\lambda$, $T = \int L d\lambda$ ($\tau, \hat{\tau}$ und so fort konjugiert komplex) erhält man aus Gl. (4a)

$$\xi = \xi + i\eta = \int \left(\tau dT + \frac{1}{\hat{\tau}} d\hat{T} \right), \quad \varphi = \int (l dT + \hat{l} d\hat{T}) \dots (5a)$$

und aus Gl. (4b)

$$z = x + iy = \int \left(\tau dt + \frac{1}{\hat{\tau}} d\hat{t} \right), \quad f = \int (L dt + \hat{L} d\hat{t}) \dots (5b).$$

Dabei sind $t(\tau)$, $\hat{t}(\hat{\tau})$ bestimmte, $T(\tau)$, $\hat{T}(\hat{\tau})$ dagegen willkürliche Funktionen.

Die Darstellungen (4a, b) und (5a, b) umfassen viele geschlossen integrierbare Probleme der Differentialgeometrie und der Aerodynamik kompressibler Medien. Wir begnügen uns mit folgenden Hinweisen:

1. Minimalflächen.

Die Minimalflächen $\varphi = \varphi(\xi, \eta)$ genügen der Differentialgleichung

$$(1 + \varphi_{\xi}^2) \varphi_{\eta\eta} - 2 \varphi_{\xi} \varphi_{\eta} \varphi_{\xi\eta} + (1 + \varphi_{\eta}^2) \varphi_{\xi\xi} = 0.$$

Es handelt sich hier um den Fall IIa mit $l = i$. Die Charakteristiken der x, y -Ebene sind die Tangenten des imaginären Kreises $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Gl. (5a) liefert die Weierstraßsche Darstellung der Minimalflächen.

2. Lineare konische Überschallströmung.

Die von Busemann¹⁾ und kürzlich von Hayes²⁾ untersuchte stationäre konische Überschallströmung, bei der die Strömungsgeschwindigkeit nur von den Verhältnissen $X/Z = x$, $Y/Z = y$ der Ortskoordinaten X, Y, Z abhängt, erfüllt bei Linearisierung die Differentialgleichung

$$(\text{tg}^2 \alpha - x^2) f_{xx} - 2xy f_{xy} + (\text{tg}^2 \alpha - y^2) f_{yy} = 0$$

für das Geschwindigkeitspotential $Z \cdot f(x, y)$. Die Anströmung erfolgt in Richtung der X -Achse α ist der Mach-Winkel der Anströmgeschwindigkeit.

Die Charakteristiken der x, y -Ebene sind die Tangenten des Kreises $x^2 + y^2 - \text{tg}^2 \alpha = 0$. Im Außenbereich dieses Kreises liegt der Fall Ia, im Innenbereich IIa vor. Die Gl. (4a) und (5a) führen mit $l = \text{tg} \alpha$ zu den von Busemann und Hayes angegebenen Formeln.

¹⁾ Vgl. Fiat-Review Angew. Math., Kap. Gasdynamik.

²⁾ W. D. Hayes: Internat. Kongreß für Mech. Paris 1946.

3. Nichtlineare ebene Druckwellen.

Die Ausbreitung nichtlinearer ebener Druckwellen (x = Ortskoordinate, t = Zeit, ρ = Dichte, $p = p(\rho)$ = Druck, $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ = Schallgeschwindigkeit) genügt der Differentialgleichung

$$f_{uu} - 2u f_{uv} - (a^2 - u^2) f_{vv} = 0.$$

Dabei ist u die Strömungsgeschwindigkeit, $v = -\frac{1}{2} u^2 - \int \frac{dp}{\rho}$ und $f(u, v)$ eine durch $x=f_u$, $t=f_v$ definierte Potentialfunktion.

Bei idealen Gasen mit konstanten spezifischen Wärmen c_p , c_v liegt für $\gamma = c_p/c_v = -1$ Fall Ia und für $\gamma = +3$ Fall Ib vor. Im Fall Ib sind die Charakteristiken der x, t -Ebene geradlinig. Die Wellen verzerren sich zwar mit fortschreitender Zeit, haben aber mit den linearen akustischen Wellen die Eigenschaft gemeinsam, beim Überkreuzen nicht abgelenkt zu werden. Im Fall Ia sind die Charakteristiken der x, t -Ebene kongruente parallele Kurven. Die Wellen werden zwar beim Überkreuzen abgelenkt, haben aber vor und nach der Überkreuzung mit den linearen akustischen Wellen die Eigenschaft gemeinsam, sich unverzerrt auszubreiten.

Zur Integrationstheorie adiabatisch-kompressibler Potentialströmungen.

Von M. Pinl in Köln.

In einem Manuskript „Zur Theorie der ebenen wirbelfreien Strömungen eines adiabatisch-kompressiblen Gases im Unterschallbereich“ aus dem Jahre 1945 und in einer seit 1946 in Druck befindlichen Arbeit „Allgemeine Integration linearer partieller Differentialgleichungen von elliptischem Typ bei zwei Grundvariablen“ hat Herr M. Eichler interessante Ergebnisse erzielt, über welche hier — naturgemäß nur im Rahmen einer sehr beschränkten Auswahl — referiert werden soll.

Sind V und u Funktionen der unabhängigen Variablen x, y , so verwandelt die Transformation $u = \frac{U}{V}$ die Normalform

$$\Delta U + A(x, y) U_x + B(x, y) U_y + C(x, y) U = 0$$

einer elliptischen Differentialgleichung bei geeigneter Bestimmung der Funktion V in die ihr zugeordnete komplexe Normalform

$$\Delta u + M(x, y) (u_x + i u_y) + N(x, y) u = 0 \quad (1)$$

(Transformation der abhängigen Veränderlichen bei ungeändert bleibenden Grundvariablen). Für $M = 0$ reduziert sich (1) auf

$$(\Delta + N) u = 0 \quad (2).$$

Ein wichtiger Repräsentant für (2) ist durch die S. Tschapliginsche Differentialgleichung für die Stromfunktion einer ebenen adiabatisch-kompressiblen Potentialströmung gegeben, wenn man deren von A. Busemann¹⁾ gefundene modifizierte Gestalt zugrunde legt.

Durch einen Iterationsprozeß mit dem analytischen Anfangselement $u_0(x, y) = f(x + iy) = f(z)$ entsteht der „Integraloperator“

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, y) = u(x, y) = f(z) - \int_0^z S(x, y, \zeta) f(\zeta) d\zeta = \mathfrak{L}[f(z)] \quad (3).$$

Dann gilt der Satz: der Integraloperator $\mathfrak{L}[f(z)]$ ordnet jeder analytischen Funktion $f(z)$ der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ eine Lösung der Differentialgleichung (1) zu, wofern die „erzeugende Funktion“ $S(x, y, \zeta)$ den folgenden Bedingungen genügt:

- $S(x, y, \zeta)$ ist eine analytische Funktion von ζ , wenn ζ denselben Wertebereich durchläuft wie $z = x + iy$;
- $S(x, y, \zeta)$ ist ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (1);
- mit $S(x, y, x + iy) = T$ gilt $T_x + i T_y = \frac{1}{2} N\{x, y\}$.

Real- und Imaginärteil der durch (3) dargestellten Lösungen von (1) genügen gewissen Integrodifferentialgleichungen, die sich für $M = N = 0$ auf das System der Cauchy-Rie-

¹⁾ A. Busemann: Z. angew. Math. Mech. 17 (1937), S. 73—79.

man nischen Differentialgleichungen reduzieren. Beispiele derartiger erzeugender Funktionen sind:

$$\Delta u - \frac{2}{x^2} u = 0, \quad S = \frac{1}{x}$$

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad S = \bar{z} k(t), \quad \bar{z} = x - iy, \quad t = \bar{z}(z - \zeta), \quad t k''(t) + 2 k'(t) + \frac{\lambda}{4} k(t) = 0, \quad \lambda = \text{const} \neq 0.$$

Sind schließlich $g_v(\zeta)$ endlich oder unendlich viele geeignet gewählte analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen ζ , ferner $G_v(x, y)$ ebenso viele partikuläre Integrale der Tschapligin-Busemannschen Differentialgleichung (vom Typus $(\Delta + N)u = 0$), z. B. die bereits von S. Tschapligin angegebenen hypergeometrisch charakterisierten partikulären Integrale, so ordnet der Integraloperator (3) mit Hilfe der erzeugenden Funktion

$$S(x, y, \zeta) = \sum_v g_v(\zeta) G_v(x, y)$$

jeder analytischen Funktion $f(z)$ eine Lösung der Tschapliginschen Differentialgleichung zu. Auf diese Weise erhält man zu jeder analytischen Funktion $f(z)$ in expliziter Form die Stromfunktion einer ebenen adiabatisch-kompressiblen Potentialströmung.

Axensymmetrische Gasströmungen in Rotationshohlräumen von kleiner Breite.

Von W. Spannhake, VDI in Karlsruhe.

Die Beschränkung auf die Mittelwerte der Strömungs- und Zustandsgrößen, die der Mittelfläche eines Rotationshohlraumes mit kleiner Breite zugeschrieben werden können, gestattet eine eindimensionale Behandlung axensymmetrischer Strömungen in einem freien Rotationshohlraum, weil die Strömung in kongruenten, drehsymmetrisch um die Axe verteilten Stromröhren aufgeteilt werden kann. Zu den Gleichungen der Kontinuität, der adiabatischen Zustandsänderung und der Konstanz der Strömungsenergie (Bernoulli), die zur Theorie der Lavaldüse genügen, tritt hier noch die Gleichung der Konstanz des Dralles (der Flächensatz). Diese 4 Gleichungen lauten in dimensionsloser Schreibweise

$$\varphi \cdot \psi \cdot \sin \alpha \cdot x \cdot y^k = \sqrt{\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}} \cdot \sin \alpha_{kr} \quad (\text{Kontinuitätsgleichung}),$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_{kr}} = \left(\frac{a}{a_{kr}}\right)^k \quad (\text{Zustandsgleichung}),$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{Bernoullische Gleichung}),$$

$$\varphi \cdot \cos \alpha = \frac{\cos \alpha_{kr}}{\sqrt{k+1}} \quad (\text{Drallsatz}).$$

Dabei ist

$$\varphi = \frac{r}{r_{kr}}; \quad \psi = \frac{b}{b_{kr}}; \quad x = \frac{c}{\sqrt{k+1} \cdot a_{kr}}; \quad y = \sqrt{\frac{k}{k+1}} \cdot \frac{a}{a_{kr}}$$

r = Radius, b = Breite, c = Strömungsgeschwindigkeit, a = örtliche Schallgeschwindigkeit, ϱ = Dichte, α = Winkel der Stromlinien gegen die Umfangsrichtung. Der Index kr bezieht sich auf die Stelle, wo die Strömungsgeschwindigkeit die Schallgeschwindigkeit durchschreitet. Die Zahl k ist $k = \frac{2}{\kappa + 1}$; κ = Exponent der Adiabate.

Aus den obigen Gleichungen ergeben sich die beiden folgenden:

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\psi} \cdot \sqrt{\left(\frac{k}{k+1}\right)^k} \cdot \frac{\text{tg } \alpha_{kr}}{\sqrt{(1-x^2)^k}},$$

$$(k+1) \varphi^2 \cdot x^2 - \frac{1}{\psi^2} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \cdot \frac{\sin^2 \alpha_{kr}}{(1-x^2)^k} - \cos^2 \alpha_{kr} = 0.$$

Dieser Zusammenhang zwischen φ und x liefert Extremwerte für φ an den Stellen, wo

$$c \cdot \sin \alpha = a$$

wird, d. h. dort, wo die Meridiankomponente der Strömungsgeschwindigkeit der örtlichen Schallgeschwindigkeit gleich wird.

Die Untersuchung einzelner Beispiele konstanter oder vorgewählter, gesetzmäßig veränderlicher Breite zeigt, daß und wie weit es auf das Verhältnis von Meridian- und Drallströmung ankommt, welche *M a c h* schen Zahlen erreicht werden. Es ergeben sich im Einzelfall Grenzkreise im Hohlraum, innerhalb oder außerhalb derer die Strömung unter Beschränkung auf einen gewissen Bereich *M a c h* scher Zahlen verläuft und auf denen die Meridiangeschwindigkeit gleich der örtlichen Schallgeschwindigkeit ist, während die Gesamtgeschwindigkeit die örtliche Schallgeschwindigkeit übersteigt. Für einen gewissen Zusammenhang zwischen Breite und Radius sind außerhalb eines Kleinstkreises Strömungen mit allen *M a c h* schen Zahlen möglich. Dieser Zusammenhang ist durch die Gleichung

$$\psi = \sqrt{\left(\frac{k \cdot \varphi^2}{(k+1)\varphi^2 - 1} \right)^k}$$

gegeben.

Die erwähnten Kleinst- und Größtkreise in den Hohlräumen mit vorgegebenem Breitenverlauf sind „Rückkehrkanten“. In der Theorie ebener Strömungen sind dies bekanntlich Kurven, an denen die Stromlinien mit gemeinsamer Tangente umkehren, um in derselben Ebene zurückzulaufen. Dies ist physikalisch unmöglich. Im Hohlraum aber kann man die Grenzkreise zu solchen eines Hohlräumtes mit Umbiegung der Mittelfläche von außen nach innen bzw. umgekehrt machen, d. h. Hohlräume mit nicht monotonem Radienverlauf herstellen und damit die Strömung auch jenseits der Grenzkreise verwirklichen.

Für Rotationshohlräume mit monotonem Radienverlauf kann man die Rechnung auch als eine Näherungstheorie der „kompressiblen Wirbelquelle bzw. -senke im allgemeinen Rotationshohlraum“ bezeichnen.

Theoretisch und experimentell ermittelter Durchfluß einer nichtstationären Gasströmung.

Von *F. Schultz-Grunow* in Aachen.

Um die Anwendbarkeit der Theorie der nichtstationären Gasströmung zu prüfen und die tatsächlichen Randbedingungen festzustellen, sei ein häufig auftretender Fall, nämlich der Ausfluß aus einem Druckkessel durch einen periodisch öffnenden Drehschieber und anschließendes Rohr behandelt und mit den Versuchsergebnissen von *E. Hummel*¹⁾ verglichen.

Im Fall des Dauerbetriebs werden die vom Schieber in das Rohr gesandten Druckwellen nach mehrmaligem Hin- und Herlaufen im Rohr die gleiche Schieberöffnung und den gleichen Gaszustand antreffen, was Bild 1 für die halbe Resonanzdrehzahl im Weg-Zeit-Diagramm für eine Welle unter der Vereinfachung zeigt, daß die Wellengeschwindigkeit gleich einer mittleren Schallgeschwindigkeit sei. In einem Zustandsdiagramm, dessen Ordinaten die Gas- und die Schallgeschwindigkeit u, a sind, liegen also alle längs einer hin- und herlaufenden Welle auftretenden Zustände auf einem geschlossenen Linienzug.

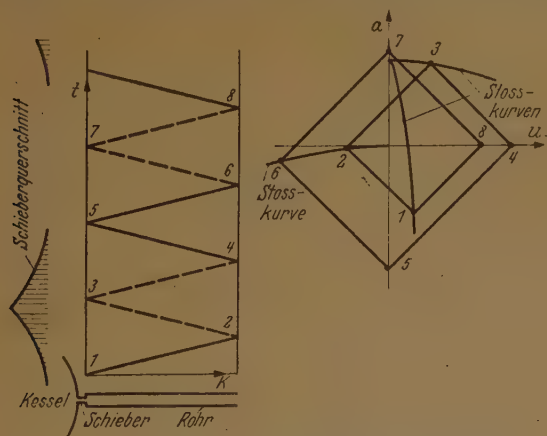


Bild 1. Durchfluß bei halber Resonanzdrehzahl im Weg-Zeit-, und u, a -Diagramm.

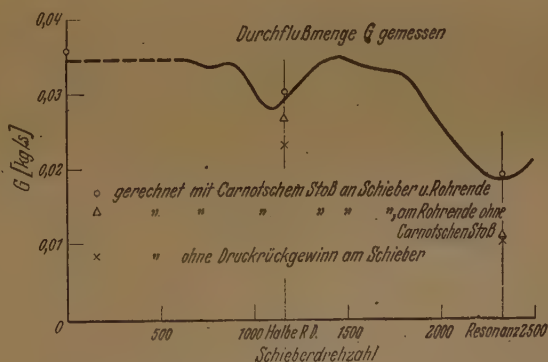


Bild 2. Vergleich der gerechneten und gemessenen Durchflußmenge.

Am Schieber und auch am Rohrende bei Einstömen (Bordamündung) tritt der *C a r n o t* sche Stoßverlust auf. Die Rohrstrecke, über der sich der Stoß ausbildet, ist kurz genug, um zu jeder Zeit den Stoßverlust des stationären Falles ansetzen zu können. Alle Zustände, die aus

¹⁾ *E. Hummel*: Diss. Braunschweig 1944.

dem Kesselzustand über den Carnotschen Stoß erreicht werden, liegen im u, a -Diagramm auf einer Kurve, die als Stoßkurve bezeichnet sei. Die Kurve läßt für sich eine gewisse Schieberöffnung nach bekannten Beziehungen²⁾ einzeichnen. Das offene Rohrende wurde in stationärem Versuch als Bordamündung bestätigt, hierfür besteht ebenfalls eine Stoßkurve. Nun ist noch zu bemerken, daß die längs hin- und rücklaufenden Wellen auftretenden Zustände im u, a -Diagramm auf zwei Geradenscharen, den Charakteristiken liegen³⁾. Der Ausgangspunkt am Schieber, bzw. der Ausgangspunkt auf einer der Stoßkurven ergibt sich jetzt aus der Bedingung, daß alle längs einer Welle auftretenden Zustände auf einem geschlossenen Linienzug liegen, was etwas Probieren erfordert (Bild 1). Die Zuordnung der im u, a -Diagramm gefundenen Zustände zum Weg-Zeit-Diagramm ist in Bild 1 durch Nummern gegeben. Die vom Carnotschen Stoß verursachten Entropieunterschiede sind vernachlässigt, weil in dem Anwendungsbeispiel der Kesseldruck nur 0,5 at betrug.

Bild 2 zeigt die gute Übereinstimmung der Rechnung mit dem Versuch für zwei verschiedene Drehzahlen. Daß die Rechnung etwas höhere Werte liefert, rührt von der Vernachlässigung der Reibung her. Es zeigt sich, daß der Reibungseinfluß bei allen Drehzahlen der gleiche wie bei unendlich kleiner Drehzahl ist. Weiterhin zeigen die übrigen eingetragenen Rechnungswerte, daß der Stoßverlust sowohl am Ventil wie auch am Rohrende nicht vernachlässigbar ist.

²⁾ Siehe etwa Handb. Exp. Phys. Bd. IV, 1. Teil, S. 406. Beitrag von A. Busemann.

³⁾ F. Schultz-Grunow: Forsch. Ing.-Wes. Bd. 13 (1942), S. 125.

Über eine angenäherte quasilineare Potentialgleichung der ebenen kompressiblen Strömung und ihre mittels der Legendre-transformation zu gewinnenden Lösungen.

Von F. Reutter in Karlsruhe.

Die Stromdichte der ebenen adiabatischen kompressiblen reibungslosen und wirbelfreien Gasströmung mit dem Geschwindigkeitsvektor $w = u(x, y)i + v(x, y)j = (u_a + u_1(x, y))i + v(x, y)j$, u_a konstant, $\left|\frac{v}{u}\right| \ll 1$, läßt sich, wie u. a. Kl. Oswatitsch¹⁾ bemerkt hat, in einer gewissen Umgebung der kritischen Schallgeschwindigkeit c^* ($0,5 < \frac{u}{c^*} < 1,5$) in recht guter Näherung durch die in u quadratische Funktion

$$\Theta\left(\frac{w}{w_\infty}\right) = \Theta_0 + \Theta_2\left(\frac{c^* - u}{w_\infty}\right)^2 \quad (w = \text{Maximalgeschwindigkeit})$$

ersetzen. Mit

$$\Phi_x = U = \frac{u - c^*}{u_a}, \quad \Phi_y = V = \frac{v - c^*}{u_a},$$

wo $\frac{c^*}{u_a}$ nur von $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ (Verhältnis der spezifischen Wärmen) und $M_a = \frac{u_a}{c^*}$ abhängt, ergibt sich hieraus als Potentialgleichung

$$-\Phi_x \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

Ihre unmittelbare Behandlung in der Strömungsebene stößt auf erhebliche Schwierigkeiten. Sie geht aber durch Anwendung der Legendretransformation (die Mollenbroektransformation führt auf eine wesentlich kompliziertere Gleichung) mit $x = \varphi_U(U, V)$, $y = \varphi_V(U, V)$ in die lineare Gleichung

$$-U \varphi_{VV} + \varphi_{UU} = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

über. Deren allgemeines Integral kann in der Form

$$\varphi(U, V) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(U, V) \quad \dots \dots \dots (3)$$

mit

$$\varphi_\nu(U, V) = (\alpha_\nu P_{\lambda_\nu}(U) + \beta_\nu Q_{\lambda_\nu}(U)) \cdot \mathfrak{C}_0 \sqrt{\lambda_\nu} \cdot V$$

und

$$\left. \begin{aligned} P_{\lambda_\nu}(U) &= \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{3 \cdot 2} U^3 + \frac{\lambda_\nu^2}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} U^6 - \frac{\lambda_\nu^3}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} U^9 + \dots \dots \dots\right) \\ Q_{\lambda_\nu}(U) &= \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{4 \cdot 3} U^3 + \frac{\lambda_\nu^2}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} U^6 - \frac{\lambda_\nu^3}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} U^9 + \dots \dots \dots\right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots (4)$$

¹⁾ Nach einer mündlichen Mitteilung.

geschrieben werden. Es lassen sich nun solche λ_v -Folgen mit $\lambda_v \rightarrow \infty$ auswählen, daß die unendliche Reihe von Funktionen $\varphi(U, V) = \sum_{v=1}^{\infty} \varphi_v(U, V)$ nur für $|U| < \left| \frac{u_a - c^*}{u_a} \right|$ und $V = 0$ absolut und gleichmäßig konvergiert, obwohl die Reihen für die einzelnen P_{λ_v} und Q_{λ_v} beständig konvergent sind, z. B.:

$$\lambda_v = \frac{9 \lambda_v^3}{|U_a|^3},$$

d. h. für $x \rightarrow \infty$ wird $U = \frac{u_a - c^*}{u_a}$, während y noch unbestimmt bleibt. Die Untersuchung des Charakters der so erhaltenen Singularität der Potentialfunktion steht zwar noch aus, doch spricht das Verhalten von y durchaus dafür, die Untersuchungen in dieser Form anzusetzen und Strömungen zu untersuchen, die im Unendlichen die durch die so getroffene λ_v -Auswahl definierte Singularität besitzen.

Zur Behandlung der Umströmung eines nichtangestellten Profils mit der y -Achse als Symmetrieachse werden auf der Kontur der Profilkurve $y = f(x)$ eine Anzahl von n Punkten $P_\mu(x_\mu, y_\mu)$ herausgegriffen, für die $\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_\mu} = m_\mu$. Dann gelten für die unbekannten Größen α_v, β_v in Gl. (3) und die Werte $U_\mu = U(x_\mu, y_\mu)$ mit $V_\mu = m_\mu \left(U_\mu + \frac{c^*}{u_a} \right)$ die Gln.

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } x_\mu &= \sum_{v=1}^n (\alpha_v P'_{\lambda_v}(U_\mu) + \beta_v Q'_{\lambda_v}(U_\mu)) \operatorname{Co} \sqrt{\lambda_v} V_\mu \\ \text{b) } y_\mu &= \sum_{v=1}^n (\alpha_v P_{\lambda_v}(U_\mu) + \beta_v Q_{\lambda_v}(U_\mu)) \sqrt{\lambda_v} \operatorname{Sin} \sqrt{\lambda_v} V_\mu \\ \text{c) } (m_\mu^2 - 1) \sum_{v=1}^n (\alpha_v P'_{\lambda_v}(U_\mu) + \beta_v Q'_{\lambda_v}(U_\mu)) \sqrt{\lambda_v} \operatorname{Sin} \sqrt{\lambda_v} V_\mu \\ &\quad - m_\mu (1 - U_\mu) \sum_{v=1}^n (\alpha_v P_{\lambda_v}(U_\mu) + \beta_v Q_{\lambda_v}(U_\mu)) \lambda_v \operatorname{Co} \sqrt{\lambda_v} V_\mu = 0 \end{aligned} \right\} \mu = 1, 2, \dots, n \quad (5).$$

Dies ist ein System von $3n$ Gln. für die $2n$ linear auftretenden Unbekannten α_v, β_v , während die n Unbekannten U_μ , die die Geschwindigkeitsverteilung längs des Profils kennzeichnen, transzendent vorkommen. Multipliziert man die einzelnen Gleichungen (5a) mit dem zugehörigen y_μ , die entsprechenden Gln. (5b) mit x_μ und subtrahiert sie voneinander, so erhält man ein System von n linearen homogenen Gleichungen für die $2n$ Unbekannten α_v, β_v und daher zusammen mit den Gleichungen (5c) gerade $2n$ lineare homogene Gleichungen für die $2n$ Unbekannten α_v, β_v . Die Determinante dieses Systems sei $D(U_\mu)$. Daher sind die Werte U_μ die Wurzeln der Gleichung $D(U_\mu) = 0$.

Die praktische Auflösung des Systems (5) stößt auf große rechnerische Schwierigkeiten, führt aber bei der Verwendung einer zu geringen Anzahl von Profilpunkten zu ziemlich ungenauen Resultaten. Es scheint daher zweckmäßiger, mit einer größeren Anzahl von Profilpunkten zu arbeiten und zu vorgegebenen Werten von m_μ, U_μ und α_v oder β_v die Größen x_μ, y_μ und β_v oder α_v aus einem linearen Gleichungssystem zu bestimmen. Freilich ist man jetzt z. T. wieder auf den Weg des Probierens zur Erzielung brauchbarer Profilverformen angewiesen.

Alle diese Überlegungen gelten zunächst für Profile mit nichthorizontaler Tangente, da für $V = 0$ nach Gl. (5b) notwendig $y = 0$ folgt. Man kann sich aber von dieser Beschränkung ebenso wie von der auf nichtangestellte Profile freimachen, indem man die Potentialfunktion (3) durch Zulassung von Verzweigungsstellen in geeigneter Weise modifiziert.

Die Bestimmung des Luftwiderstandes von schwebenden staubförmigen Teilchen.

Von W. Barth in Nonnenhorn (Bodensee).

Ein staubführender Gasstrom möge durch die in Bild 1 dargestellte Düse gesaugt werden. Die Düse bestehe aus einer engen zylindrischen Bohrung, deren Einlauf abgerundet ist. Vor Eintritt in die Düse wird die Luftgeschwindigkeit ungefähr gleich der Staubgeschwindigkeit sein. Beim Eintritt in die Düse steigt die Luftgeschwindigkeit sehr rasch, die Staubgeschwindigkeit infolge der Massenträgheit der Staubkörner jedoch nur langsam an. Zur Berechnung dieser Vorgänge werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

- V Angesaugte Luftmenge in der Zeiteinheit
- G Angesaugte Staubmenge in der Zeiteinheit

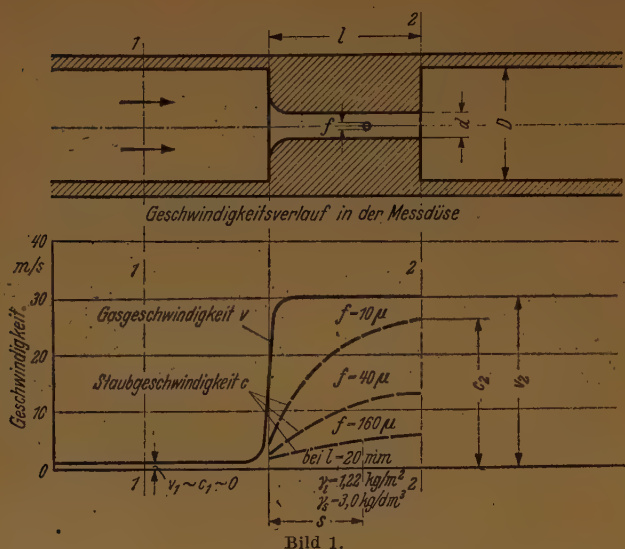


Bild 1.

- γ_l Raumgewicht der Luft
- γ_s Raumgewicht des Staubes
- v Gasgeschwindigkeit
- c Staubgeschwindigkeit
- t Zeit
- s Abstand vom Einlauf
- f Durchmesser der kugelförmigen Staubteilchen
- g Erdbeschleunigung
- α Widerstandsbeiwert
- p Statischer Druck
- Δp_s Zunahme des Druckabfalles in der Meßdüse bei Staubaufgabe
- l Länge der Düsenbohrung
- d Durchmesser der Düsenbohrung

Mit dem Index 1 werden die Geschwindigkeiten und Drücke vor der Meßdüse, mit dem Index 2 am Düsenaustritt bezeichnet.

Für ein Staubteilchen von der Masse m und der Stirnfläche F im Abstand s vom Einlauf gilt:

$$\alpha \cdot F (v - c)^2 \cdot \frac{\gamma_l}{2g} = m \cdot \frac{dc}{dt} = m \cdot c \cdot \frac{dc}{ds} \quad (1).$$

Für kugelige Staubteilchen wird:

$$m = \frac{\pi}{6} f^3 \cdot \gamma_s, \quad F = \frac{f^2 \pi}{4}, \quad \frac{4}{3} \frac{\gamma_s}{\gamma_l} \cdot f \cdot c \cdot \frac{dc}{ds} = \alpha (v - c)^2 \quad (2).$$

Macht man die Annahme, daß der Staub nur aus Teilchen gleicher Korngröße bestehe und gleichmäßig aufgegeben werde, so findet man bei Vernachlässigung der Wandreibung für den Druckabfall dp längs der Wegstrecke ds :

$$dp = \frac{\gamma_l}{2g} dv^2 + \frac{G \cdot v}{V \cdot g} \cdot dc \quad (3)$$

und durch Integration

$$p_1 - p = \frac{\gamma_l}{2g} (v^2 - v_1^2) + \frac{G}{V \cdot g} \int_{c_1}^c v \cdot dc \quad (4).$$

Unter der Annahme, daß der Rohrdurchmesser D im Verhältnis zur Düsenbohrung d so groß gewählt worden sei, daß $v_1 \sim c_1 \sim 0$ gesetzt werden kann, ferner daß die Luftgeschwindigkeit am Düseninlauf sprunghaft vom Wert v_1 auf den Wert v_2 ansteigen und dann konstant bleiben möge, erhält man für diesen Sonderfall aus Beziehung (2) und (4)

$$s = \frac{4}{3} \cdot \frac{\gamma_s}{\gamma_l} \cdot f \int_0^{c_2} \frac{c \cdot dc}{(v_2 - c)^2 \alpha} \quad (5),$$

$$\Delta p_s = \frac{G}{V} \cdot \frac{v_2 \cdot c_2}{g} \quad (6).$$

Mit Hilfe der vorstehenden Beziehungen kann der zusätzliche Druckverlust bei Staubaufgabe errechnet werden. Dieser ist einmal von der aufgegebenen Staubmenge und zum anderen von der Korngröße des aufgegebenen Staubes abhängig. Diese Erkenntnis wird dazu verwendet, um umgekehrt aus dem zusätzlichen Druckverlust bei Staubaufgabe Schlüsse auf die Korngröße bzw. den Luftwiderstand von Stauben zu ziehen, wobei der zusätzliche Druckverlust, sowie die abgesaugte Luftmenge und die aufgegebene Staubmenge vorher durch Versuch bestimmt werden muß. Auf diese Weise lassen sich Feinheitsbestimmungen für technische Zwecke¹⁾ durchführen. Die Methode eignet sich auch zur Klärung grundsätzlicher Fragen über die Widerstandsverhältnisse sehr kleiner Körper.

Im folgenden wird als Beispiel das Ergebnis eines Versuches mitgeteilt. Ausgesiebter Erstaub (Maschenweite $60 \mu - 90 \mu$, wobei $1 \mu = 1/1000 \text{ mm}$) wurde durch eine Meßdüse mit $d = 2 \text{ mm}$, $D = 20 \text{ mm}$ und $l = 20 \text{ mm}$ gesaugt. Die aufgegebene Staubmenge betrug $33,6 \text{ g}$, die abgesaugte

¹⁾ Fachausschuß für Staubtechnik: „Richtlinien für die Bestimmung der Zusammensetzung von Stauben nach Korngrößen und Fallgeschwindigkeit.“ VDI-Verlag, 1936.

Luftmenge 15,3 l während einer Versuchsdauer von 180 s. Der Druckabfall in der Meßdüse wurde ohne Staubaufgabe zu 61 mm W. S. und mit Staubaufgabe zu 125 mm W. S. ermittelt. Damit errechnet sich die Luftgeschwindigkeit v_2 zu 27,1 m/s und die Staubgeschwindigkeit c_2 zu 9,9 m/s, wobei die bei Staubaufgabe erhöhte Wandreibung durch eine Verringerung der zusätzlichen Druckverluste um 7% berücksichtigt wurde. Für Kugeln mit einem Durchmesser von 60μ und einem γ_s von $3,0\text{ kg/dm}^3$ wie bei dem untersuchten Staub ergibt die Rechnung die gleiche Staubendgeschwindigkeit. Der untersuchte Staub ist also widerstandsmäßig einem Gemisch von Kugeln von 60μ Durchmesser gleichwertig.

D. Allgemeine Mechanik.

Über den allgemeinen schweren Kreisel.

Von *Georg Hamel* in Berlin, z. Z. Landshut.

Dividiert man die Eulersche Gleichung des schweren Kreisels durch das Gewicht und führt dementsprechend neue Hauptträgheitsmomente A, B, C , von der Dimension cm sec^2 ein, so lauten die Bewegungsgleichungen des schweren allgemeinen Kreisels

$$\frac{d\bar{D}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{D} + \bar{r}^* \times \bar{k} = 0 \quad (1),$$

$$\frac{d\bar{k}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{k} = 0 \quad (2),$$

wobei Vektoren durch übergesetzte Striche, das Vektorprodukt durch das liegende Kreuz und die zeitliche Ableitung nach einem körperfestem System durch Frakturbuchstaben bezeichnet sind. $\bar{\omega}$ ist der Vektor der Winkelgeschwindigkeit, \bar{D} der Vektor des Dralles, \bar{r}^* der im Körper feste Vektor nach dem Schwerpunkt, \bar{k} der nach obengerichtete Einheitsvektor.

Von diesem Problem sechster Ordnung sind drei Integrale bekannt:

$$\bar{k}^2 = 1 \quad (3),$$

$$\text{das Energieintegral } T + \bar{k} \bar{r}^* = h \text{ mit } T = 1/2 \bar{D} \bar{\omega} \quad (4),$$

$$\bar{D} \bar{k} = N \quad (5).$$

Mit Hilfe dieser drei Integrale kann man i. A., wenn nämlich $\bar{r}^* \times \bar{D} \neq 0$ ist (der Ausnahmefall $\bar{D} \times \bar{r}^* = 0$ läßt sich leicht behandeln) \bar{k} in der Form

$$\bar{k} = \alpha \bar{r}^* + \beta \bar{D} + \gamma \bar{r}^* \times \bar{D} \quad (6)$$

darstellen. Mit den Abkürzungen

$$\bar{r}^{*2} = s^2, \quad \bar{r}^* \bar{D} = S; \quad \Delta = (\bar{D} \times \bar{r}^*)^2 = D^2 s^2 - S^2 > 0$$

erhält man

$$\alpha = \frac{1}{\Delta} [(h - T) D^2 - NS]; \quad \beta = \frac{1}{\Delta} [Ns^2 - S(h - T)];$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 s^2 - S^2 - N^2 s^2 - D^2 (h - T)^2 + 2(h - T)SN}.$$

So entsteht die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\bar{D}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{D} = \bar{F}(\bar{\omega}) \quad (I)$$

mit $\bar{F}(\bar{\omega}) = -\beta(\bar{r}^* \times \bar{D}) - \gamma(\bar{r}^* S - \bar{D} s^2)$.

Von Schiff und Stäckel (Math. Ann. 65, 1908) rühren drei skalare Gleichungen her, die aus (I) oder auch aus (1), (2), (3) und (4) und (5) durch Multiplikation mit \bar{D} , \bar{r}^* , und $\bar{\omega}$ entstehen, nämlich

$$D \frac{dD}{dt} = \gamma \Delta \quad (Ia),$$

$$\frac{dS}{dt} = \bar{\omega} \bar{r}^* \bar{D} \quad (Ib),$$

$$\frac{dT}{dt} = -\beta \bar{\omega} \bar{r}^* \bar{D} - \gamma \bar{\omega} \bar{r}^* S + \gamma s^2 \cdot 2T \quad (Ic).$$

Wenn $\bar{\omega} \bar{r}^* \bar{D} \neq 0$, sind (Ia), (Ib), (Ic) ein voller Ersatz für (I), sonst, also im Falle $\bar{\omega} \bar{r}^* \bar{D} = 0$ (Staudescher Kegel) kann man noch statt einer dann ausfallenden Gleichung die durch Multiplikation mit $\bar{r}^* \times \bar{D}$ entstehende Gleichung

$$\bar{r}^* \frac{d\bar{D}}{dt} \bar{D} = D^2 \bar{\omega} \bar{r}^* - 2TS - \beta \Delta \quad \dots \dots \dots (Id)$$

hinzufügen. Es sind Gleichungen für die sogenannten Hauptinvarianten D, S, T , durch die sich die anderen i. A. ausdrücken lassen, wie die genannten Autoren gezeigt haben.

Sie entdecken weiter, daß im Falle $D = \text{const.}$ die Gleichungen (Ia) und (Ic) identisch werden, sehen aber nicht den Grund, ziehen vielmehr falsche Schlußfolgerungen. Sie vergessen nämlich, nachzuprüfen, ob die Gleichungen (1) und (2) nun wirklich auch erfüllt sind. Für (1) trifft das natürlich zu, da ja (I) durch Einsetzen von (6) in (1) entsteht, aber (2) muß nachgeprüft werden. Und nun zeigt es sich, daß durch Einsetzen von (6) in (2) die Gleichung entsteht (nach Multiplikation mit $\bar{r}^* \times \bar{D}$)

$$\alpha [(\bar{\omega} \bar{r}^*) (\bar{r}^* \bar{D}) - s^2 \cdot 2T] - \beta^2 \Delta + \gamma \Delta - \gamma S \bar{\omega} \bar{r}^* \bar{D} + \gamma s^2 \Delta = 0 \quad \dots \dots \dots (7),$$

während aus (I) durch dieselben Operationen dieselbe Gleichung entsteht, jedoch mit γ multipliziert. (Die durch Multiplikation mit \bar{r}^* und \bar{D} entstehenden Gleichungen erweisen sich als identisch). Folglich ist (2) wirklich i. A. erfüllt, ausgenommen den Fall $\gamma = 0$, der aber nach (Ia) gerade mit $D = \text{const.}$ übereinstimmt. In diesem Falle muß man also noch die aus (7) entstehende Gleichung

$$\alpha [(\bar{\omega} \bar{r}^*) (\bar{r}^* \bar{D}) - s^2 \cdot 2T] - \beta^2 \Delta = 0 \quad \dots \dots \dots (II)$$

hinzunehmen. Der von Schiff und Stäckel behandelte Sonderfall $D^2 = N^2$ erweist sich leicht als unmöglich.

Über den Zusammenhang zwischen den Routhschen und den Hurwitzschen Stabilitätskriterien.

Von Hubert Cremer in Aachen.

Die Kriterien von Routh für die Stabilität schwingender Systeme sind gleichbedeutend mit den (späteren) Kriterien von Hurwitz und können durch elementare Umformungen in diese übergeführt werden. Dabei erscheinen die Routhschen Probefunktionen im allgemeinen als Produkte bzw. Quotienten von Hurwitz-Determinanten. Das „Routhsche Schema“ kann so normiert werden, daß die Routhschen Probefunktionen mit den Hurwitz-Determinanten H_ν identisch werden. Bezeichnet man mit $D_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k}$ diejenige Unterdeterminante k -ten Grades der Hurwitz-Determinante n -ten Grades

$$H_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

die die Zeilen $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ und die Spalten $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ enthält, so läßt sich das Routhsche Schema bei passender Normierung (indem man von der vierten Zeile ab jeweils die $(\nu + 3)$ -te Zeile mit dem positiven Faktor H_ν^{-1} multipliziert und dann die nächste Zeile durch kreuzweise Multiplikation bildet) in der Form schreiben:

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ D_{12}^{12} & D_{13}^{12} & D_{14}^{12} & \dots \\ D_{123}^{123} & D_{124}^{123} & D_{125}^{123} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{12\dots n-2n-1}^{12\dots n-2n-1} & D_{12\dots n-2n}^{12\dots n-2n-1} & & \\ D_{12\dots n}^{12\dots n} & & & \end{array}$$

Hier erscheinen also sämtliche Elemente des Schemas als Unterdeterminanten der höchsten Hurwitz-Determinante H_n .

Es kommt in der Praxis nur auf diese höchsten Hurwitz-Determinanten H_n und H_{n-1} an, die eine sehr einfache Bedeutung besitzen. Es ist nämlich

$$H_n = a_n H_{n-1} \dots \dots \dots (1),$$

$$a_n = (-1)^n a_0 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \dots \dots \dots (2),$$

$$H_{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{n-1} \prod_{\mu > \nu} (\lambda_\mu + \lambda_\nu) \dots \dots \dots (3)$$

(siehe auch Orlando, Math. Ann. 71), wobei die Produktbildung über alle Wurzelpaare mit $\mu > \nu$ zu erstrecken ist.

Geht man von einem stabilen Zustand aus und ändert man die Konstruktionsdaten stetig ab, so ändern sich auch die Wurzeln λ_k der charakteristischen Gleichung

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

stetig. Überschreitet hierbei ein konjugiertes Wurzelpaar $\lambda_k = -\delta_k + i\omega_k$; $\bar{\lambda}_k = -\delta_k - i\omega_k$ beim Übergang von der linken zur rechten Halbebene die imaginäre Achse ($\lambda_k = -\bar{\lambda}_k$), so verschwinden nach (1) und (3) H_n und H_{n-1} . Andererseits verschwindet a_n mit jedem λ_k , also insbesondere dann, wenn eine reelle Wurzel längs der reellen Achse von der linken in die rechte Halbebene wandert.

Überschreiten gleichzeitig k konjugierte Wurzelpaare die imaginäre Achse, so verschwinden die $2k$ obersten Hurwitz-Determinanten

$$H_n, H_{n-1}, \dots, H_{n+1-2k}.$$

Im Anschluß an meinen Vortrag hatte Herr Bilharz die Freundlichkeit, mich auf zwei von ihm veröffentlichte, mir bisher unbekannt gebliebene Arbeiten (Z. angew. Math. Mech. 1941 und 1944) aufmerksam zu machen, in denen die Beziehungen zwischen dem Routhschen Algorithmus und den Hurwitzschen Determinanten-Kriterien bereits dargelegt sind. Meine Darstellung unterscheidet sich insofern, als hier alle Zahlen des Routhschen Schemas Unterdeterminanten von H_n sind, so daß jede Zeile unmittelbar angegeben werden kann.

Ein neues Verfahren zur Beurteilung der Stabilität linearer Regelungs-Systeme.

Von L. Cremer in München.

Die algebraischen Stabilitätskriterien von Routh und Hurwitz haben die nachteiligen Eigenschaften, daß der Rechenaufwand mit dem Grad n der charakteristischen Gleichung

$$F(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \dots \dots \dots (1)$$

sehr erheblich wächst und daß der Zahlenwert des Kriteriums auch bei Annäherung an die Stabilitätsgrenze nichts über die Größe der Kreisfrequenz ω und der Abklingkonstante δ der hauptsächlich zu befürchtenden Schwingung aussagt. — Auf der anderen Seite hat die Schwachstromtechnik (Nyquist, Streckert) Verfahren zur Beurteilung der Stabilität entwickelt, die in der Betrachtung der Ortskurve bestehen, welche eine Funktion $F(\lambda)$, deren Nullstellen die Eigenwerte bedeuten, beschreibt, wenn man λ auf der imaginären Achse

$$\lambda = i\Omega \dots \dots \dots (2),$$

also der Stabilitätsgrenze in der λ -Ebene, von $-i\infty$ nach $+i\infty$ wandern läßt. Nähert man sich bei diesem Verfahren der Stabilitätsgrenze, so rückt diese Ortskurve nahe an den kritischen Punkt (in der vorliegenden Fassung: Nullpunkt) und zwar in der Nachbarschaft derjenigen Frequenz, deren Aufschaukelung zu befürchten ist; dabei ist außerdem das Lot vom kritischen Punkt auf die Ortskurve nach Ludwig ein Maß für die Abklingkonstante.

Betrachtet man nun speziell die Ortskurve des Ausdrucks (1), so ergibt sich aus seiner Aufspaltung in Linearfaktoren

$$\begin{aligned} F(i\Omega) &= a_0 i^n \Omega^n + \dots + a_{n-1} i \Omega + a_n \\ &= a_0 (i\Omega - \lambda_1) (i\Omega - \lambda_2) \dots (i\Omega - \lambda_n) \dots \dots \dots (3), \end{aligned}$$

daß jeder Klammerausdruck sich während der Wanderung von $i\Omega$ längs der imaginären Achse von $-i\infty$ bis $+i\infty$ um $+\pi$ dreht, wenn der Eigenwert λ_ν links der imaginären Achse liegt, daß also F sich um

$$\Phi = n\pi \dots \dots \dots (4)$$

drehen muß, wenn das System stabil sein soll. Für den Bereich $0 < \Omega < \infty$ gilt wegen der Symmetrie von F gegenüber der reellen Achse der Winkelzuwachs:

$$\frac{\Phi}{2} = \frac{n}{2} \pi \quad \dots \quad (4a).$$

Machen wir noch davon Gebrauch, daß alle a_μ bei Stabilität positives Vorzeichen haben müssen, so ergibt sich, daß $F(i\Omega)$ bei der Frequenz 0 die reelle Achse bei dem positiven Wert a_n in Richtung auf den ersten Quadranten verläßt und dann den Nullpunkt im mathematisch positiven Sinne so oft umfährt, bis der durch (4a) geforderte Winkelzuwachs bei Abwandern in der Richtung i^n (entsprechend der höchsten Potenz in (3)) erreicht wird. (Von diesen geometrischen Eigenschaften gehen auch schon Routh und Hurwitz aus.)

Nun genügt es zum Nachweis des geforderten Winkelzuwachses bereits, die Schnittfrequenzen zu kennen, d. h. diejenigen Werte von Ω , bei welchen einmal die imaginäre Achse geschnitten wird, also

$$\operatorname{Re} \{F\} = a_n - a_{n-2} \Omega^2 + a_{n-4} \Omega^4 - \dots = 0 \quad \dots \quad (5)$$

ist, und die der Größe nach geordnet mit

$$\Omega_1, \Omega_3, \Omega_5, \dots \quad \dots \quad (6)$$

bezeichnet seien, und andererseits die ebenso geordneten aus

$$\operatorname{Im} \{F\} = \Omega [a_{n-1} - a_{n-3} \Omega^2 + \dots] = 0 \quad \dots \quad (7)$$

sich ergebenden Werte

$$0, \Omega_2, \Omega_4, \Omega_6, \dots \quad \dots \quad (8),$$

die zu den Schnitten der Ortskurve mit der reellen Achse gehören. Der Winkelzuwachs (und somit die Stabilität des Systems) ist gewährleistet, wenn die Werte der Reihe (6) der Größe nach in die Lücken der Reihe (8) fallen (Lückenkriterium). Dieser mathematische Zusammenhang wurde bereits auf anderem Wege von Biehler gezeigt; dagegen scheint derselbe erst in neuester Zeit als ein Verfahren zur Stabilitätsprüfung benutzt worden zu sein, das in vielen Fällen weniger Rechenarbeit benötigt als die klassischen algebraischen Kriterien¹⁾.

Man kann aber das Verfahren noch um einen Schritt vereinfachen. Es genügt nämlich, eine Schnittfrequenzenreihe, z. B. $\Omega_2, \Omega_4, \dots$ zu ermitteln und durch Einsetzen die Lagen der zugehörigen Schnittwerte R_2, R_4, \dots auf der reellen Achse auszurechnen. Notwendig und hinreichend für Stabilität ist dann (bei positiven a_n) bereits, daß

$$R_2 < 0, R_4 > 0, R_6 < 0, \dots \text{ usw.} \quad \dots \quad (9)'$$

ist (Lagenkriterium). Bei Annäherung an die Stabilitätsgrenze wird im allgemeinen nur einer dieser Werte sehr klein, so daß es bei konstruktiven Abänderungen des Systems genügt, diesen auszurechnen.

Die genannten „Schnittfrequenzen-Kriterien“ nehmen eine Zwischenstellung zwischen den algebraischen und den Ortskurvenverfahren ein; sie haben mit den ersten die charakteristische Gleichung als Ausgangspunkt gemeinsam und treten wie diese als Vorzeichenbedingungen reeller Ausdrücke in Erscheinung, sie geben aber wie die letzten bei Annäherung an die Stabilitätsgrenze die zu erwartende Frequenz an und erlauben bei zusätzlicher Ausrechnung von wenigen benachbarten Punkten die Beurteilung der Stabilitätsgüte.

Nachtrag:

In der Diskussion teilte Herr Collatz mit, daß im Falle des Auftretens einer ungedämpften Eigenschwingung $\lambda_{\nu, \nu+1} = \pm i \omega_\nu$ der Faktor $(\lambda^2 + \omega_\nu^2)$ nicht nur in der ursprünglichen charakteristischen Gleichung sich abspalten läßt, sondern auch in allen nach dem Schurschen Reduktionsschema zugeordneten niedrigeren Grades; diejenige zweiten Grades heißt einfach:

$$\lambda^2 + \omega_\nu^2 = 0 \quad \dots \quad (a).$$

Herr Collatz gab der Vermutung Ausdruck, daß im Falle des Auftretens einer schwach gedämpften Eigenschwingung diese reduzierte charakteristische Gleichung entsprechend übergeht in:

$$\lambda^2 + 2\delta_\nu \lambda + \omega_\nu = 0 \quad \dots \quad (b)$$

also Kreisfrequenz und Dämpfung der am meisten zu befürchtenden Eigenschwingung erkennen läßt.

¹⁾ Die Veröffentlichung meiner diesbezüglichen im Sommer 1943 abgeschlossenen und vor einem ausgewählten Kreise vorgetragenen Untersuchungen war mir aus Geheimhaltungsrücksichten nicht möglich. Unabhängig und gleichzeitig wurde das „Lückenkriterium“ auch von A. Leonhard benutzt und empfohlen. (Siehe Arch. Elektrotechn. 38 (1944), S. 17.)

Das erste erscheint mir aus der mitgeteilten Regel für ungedämpfte Eigenwerte ohne weiteres zu folgen, denn das Hinzukommen einer kleinen Abklingkonstante, also eine kleine (komplexe) Variation der Eigenwerte, kann an ihrer Eigenfrequenz nicht viel ändern. Die Koeffizienten der Ersatzgleichung zweiten Grades ergeben sich aber nach dem obigen Beitrag von H. Cremer und unter Benutzung der dortigen Bezeichnungen allgemein zu:

$$\frac{H_{n-2}}{H_{n-3}} \lambda^2 + \frac{H_{n-1}}{H_{n-2}} \lambda + a_n = 0 \quad \dots \dots \dots (c).$$

(für $n \geq 3$ und mit $H_0 \equiv 1$.)

Es würde also für die Kreisfrequenz der am schwächsten gedämpften Schwingung eines beliebigen Systems gelten:

$$\lim_{\delta_v \rightarrow 0} \omega_v^2 = \frac{a_n H_{n-3}}{H_{n-2}} \quad \dots \dots \dots (d).$$

Das Routh-Schursche Koeffizientenschema liefert also — entgegen meinen obigen Behauptungen — einen Hinweis auf die Frequenz der am meisten zu befürchtenden Eigenschwingung. Diese praktisch wertvolle Eigenschaft scheint in der Literatur über Regelungstechnik bisher unbekannt zu sein.

Dagegen läßt die reduzierte Gleichung zweiten Grades nicht in dem Ausdruck

$$\frac{1}{2} \frac{H_{n-1} H_{n-3}}{(H_{n-2})^2} \quad \dots \dots \dots (e)$$

die Größe der kleinsten Abklingkonstante des ursprünglichen Systems, also die Stabilitätsgüte, erkennen. Die dabei im Zähler stehende Hurwitz-Determinante H_{n-1} enthält (vgl. Formel (3) des obigen Beitrages von H. Cremer) außer $2\delta_v$ auch noch sämtliche anderen Wurzelsummen als Faktoren. Diese unbekannten Zusatzfaktoren werden im allgemeinen auch nicht durch die anderen Faktoren in (e) weggekürzt.

Über die durch eine periodische Wechselkraft in einer Platte hervorgerufenen Schwingungen.

Von Hubert Cremer in Aachen.

In der Bauakustik spielt der Stoß fester Körper gegen Platten eine wichtige Rolle (Klopfschall). Da die dabei ausgelösten Stoßwellen erst nach Beendigung des Stoßvorganges wieder die Stoßstelle erreichen, kann die Platte als beliebig ausgedehnt angesehen werden. Eine Voraufgabe zu diesem Problem ist die Berechnung der von einer punktförmigen Wechselkraft im eingeschwungenen Zustand in einer unendlichen Platte ausgehenden Biegewellen.

Die Schwingung wird beschrieben durch die zur Platte senkrechte Schnelle v als Funktion von r und t .

Die als Realteil von $V(r) e^{i\omega t}$ dargestellte Lösung $v(r, t)$ muß der Differentialgleichung für die schwingende Platte

$$\Delta \Delta V - k^4 V = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

genügen und außerdem folgende Randbedingungen erfüllen:

1. Im Fernfeld muß v in eine nach außen laufende Zylinderwelle übergehen:

$$v \sim \text{Const} \cdot \frac{\cos(\omega t - kr + \alpha)}{\sqrt{r}} \quad \dots \dots \dots (2).$$

2. v muß überall endlich sein.

Wenn die vorausgesetzte punktförmige Anregung eine brauchbare Annäherung an die Wirklichkeit darstellen soll, muß ferner

3. erwartet werden (was aber mathematisch nicht mehr gefordert werden kann), daß die in der Platte auftretenden Kräfte überall, auch im Nullpunkt, endlich sind.

Die allgemeinste Lösung von (1), die der Bedingung (2) genügt, hat die Form

$$V = c_1 H_0^{(2)}(kr) + c_2 H_0^{(2)}(-ikr) \quad \dots \dots \dots (3).$$

Da die Hankelsche Funktion $H_0^{(2)}(x)$ im Nullpunkt singulär ist, erfordert die Bedingung der Endlichkeit der Schnelle

$$c_1 = -c_2 \quad \dots \dots \dots (4).$$

Die einzige Lösung

$$V = V_0 (H_0^{(2)}(kr) - H_0^{(2)}(-ikr)) \quad \dots \dots \dots (5)$$

erfüllt nun aber auch noch zusätzlich die Bedingung der Endlichkeit der auftretenden Kräfte und zwar ergibt sich

$$\frac{P_0}{V_0} = \frac{4}{3} \sqrt{3} s^2 \sqrt{E'} \varrho \dots \dots \dots (6),$$

wobei s die Plattenstärke, E' den Elastizitätsmodul bei einseitig verhinderter Querkontraktion und ϱ die Dichte bedeutet.

Der mechanische Eingangswiderstand ist also im Nullpunkt nicht nur endlich, sondern überdies reell und unabhängig von der Frequenz.

Die hier vorgetragene Mitteilung ist Untersuchungen über Probleme des Körperschalls entnommen, die ich auf Anregung von L. Cremer und gemeinsam mit ihm durchgeführt habe.

Moderne Lösungen des Auswuchtproblems.

Von Klaus Federn in Darmstadt.

Die Aufgabe einer Auswuchtmaschine besteht darin, die beiden Kräfte des Kraftkreuzes, zu dem man alle Differenzen im Gleichgewicht der Fliehkräfte eines umlaufenden Körpers, also alle „Unwuchten“ zusammenfassen kann, nach Richtung und Größe so zu bestimmen, daß die Werkstatt in der Lage ist, einen Ausgleich danach vorzunehmen¹⁾ (dieser muß im Maschinenbau bis herunter zu 5–20 μ Schwerpunktsverlagerung, in der Feinmechanik mitunter bis zu 0,2 μ getrieben werden).

Zwischen den Fliehkräften U_1 und U_2 in den beiden für einen Ausgleich vorgesehenen Ebenen E_1 und E_2 und den Schwingungen an den Lagerstellen eines starren Körpers bestehen die Gleichungen

$$\mathfrak{B}_1 = \gamma_{11} \cdot U_1 + \gamma_{12} \cdot U_2 \quad \mathfrak{B}_2 = \gamma_{21} \cdot U_1 + \gamma_{22} \cdot U_2.$$

Die Vektoren \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 sind die Drehzeiger der Schwingungsausschläge bei ebener Bewegung, und die γ -Werte sind in der symbolischen Schreibweise der Elektrotechnik komplexe Einflußzahlen von der Form $\gamma = \alpha + i\beta$, deren imaginärer Teil bei fehlender Dämpfung verschwindet.

Früher verwendete man mechanische Verfahren — bekannt unter dem Namen „Doppelpendelverfahren“ von L a w a c z e c k - H e y m a n n und „Rahmenverfahren“ von S c h e n c k —, um die beiden Unwuchten zu trennen und damit einer systematischen Messung zugänglich zu machen²⁾. Heute kann das Gleichungssystem auf elektrischem Wege nach den beiden unbekannten Unwuchten U_1 und U_2 aufgelöst werden. Die elektrischen Schwingungsaufnehmer (Tauchspulen)³⁾ bilden dabei \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 in formgleiche elektrische Wechselspannungen um; von diesen werden entsprechend der Koeffizienten des nach U_1 und U_2 aufgelösten inversen Gleichungssystems Spannungsbruchteile abgegriffen und unter Wahrung ihres vektoriellen Charakters überlagert⁴⁾. Die Einstellung der Schaltungsglieder (verstellbare Widerstände und Umschalter) erfolgt nicht nach Berechnungen, sondern empirisch, indem nacheinander in die eine oder die andere Ausgleichsebene Hilfsunwuchten eingesetzt werden, bis jeweils der Einfluß einer Hilfsunwucht auf der gegenüberliegenden Meßseite verschwindet. Unter Benutzung der vom Verf. angegebenen und für den Industriegebrauch zugeschnittenen Leitertafel- oder Kurventafelverfahren, können die Werte der Einstellglieder auch ohne Probieren gefunden werden. Falls man die Unwuchten in Form ihrer Komponenten für zwei senkrecht aufeinanderstehende Koordinatenrichtungen abliest, kann das Einstellen der elektrischen Überlagerungsschaltung auch dann vorgenommen werden, wenn für den Eichversuch mit den künstlichen Unwuchten kein ausgewuchteter Körper zur Verfügung steht. Die Anzeigen der vorhandenen Unwucht werden dann durch Differenzenbildung in den Komponenten auf graphischem oder numerischem Wege leicht eliminiert. Numerische Verfahren sind auch bei wellen-elastischen Körpern bei hohen Drehzahlen anwendbar. Das elektrische Überlagerungsverfahren und die genannten graphischen und numerischen Verfahren sind auch von dem Gedanken herzuleiten, daß die Überlagerung der Schwingungsaufnehmerspannungen vom physikalischen Standpunkt aus dasselbe darstellt wie das mechanische Verschieben der Schwingungsaufnehmer von den Lagerstellen in die den Ausgleichsebenen zugeordneten Stoßmittelpunktebenen des umlaufenden Körpers.

Die Winkellage der Unwuchten braucht heute nicht mehr mit Hilfe mechanischer Kompensationssysteme gesucht zu werden, sondern kann unmittelbar in der Form der Komponenten des Unwuchtvektors abgelesen werden. Man muß zu diesem Zweck den kombinierten Wechselspannungen der Schwingungsaufnehmer einen Sinus- oder Cosinusstrom multiplikativ überlagern, der

¹⁾ V. Blaeß: Über den Massenausgleich rasch umlaufender Körper. Z. angew. Math. Mech. 6 (1926), S. 429–448.

²⁾ H. Oschatz: Wege zum Auswuchten umlaufender Massen. Z. VDI 87 (1943), S. 761–765.

³⁾ P. M. Filier: Elektrische Messung mechanischer Größen. Berlin 1940.

⁴⁾ J. G. Baker und F. C. Rushing: Balancing rotors by means of electrical networks. J. Franklin-Inst. 22 (1936), S. 183–196.

von einem mit dem Wuchtkörper synchron laufenden Phasengeber erzeugt wird, und man muß für die Anzeige ein integrierendes Instrument verwenden, am besten ein dynamometrisches Drehspulgerät, das in größerer Form als Wattmeter bekannt ist. Ein solches Instrument folgt in seiner elektrischen Wirkung treu den Vorschriften, die in den E u l e r'schen Formeln zur Bestimmung der Koeffizienten a_1 und b_1 einer Fourierreihe liegen,

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \omega t \, dt, \quad b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin \omega t \, dt,$$

wobei $x(t)$ eine periodische Funktion mit der Schwingungsdauer T ist. Nur eine Phasenwinkelbestimmung, die diesen Gleichungen entspricht, gibt Gewähr dafür, daß die Unwuchtanzeige nicht durch den Einfluß harmonischer Oberschwingungen oder anderer nicht periodischer Störschwingungen gefälscht wird.

Auch bei Anzeige der Unwucht als Sinuskurve auf dem Schirm eines Kathodenstrahl-Oszillographen kann Größe und Winkellage der Unwucht unmittelbar nach dem vom Verf. entwickelten Zwei-Komponenten-Verfahren bestimmt werden, indem die beiden räumlich um 90° gegeneinander verdrehten Komponenten des Unwuchtvektors als zwei um 90° phasenverschobene Augenblickswerte in der Sinuskurve abgelesen werden. Die beiden um 90° phasenverschobenen Punkte kann man als helle Punkte durch Strahlmodulation erzielen; diese wird am besten von einem Fotoabtastgerät gesteuert, das auf 2 um 90° versetzte schwarze Marken auf den Wuchtkörperumfang anspricht. Jegliche mechanische Kupplung mit dem Wuchtkörper kann dann unterbleiben⁵⁾. Da das Auge nichtharmonische Störschwingungen leicht durch Mittelwertbildung herausziehen und die Auslenkung durch harmonische Oberschwingungen korrigieren kann, kommt man bei diesem Verfahren, auch bei sehr kleinen Körpern, bis zu 80% unter den Pegel der übrigen, meist von den Kugellagern verursachten Störschwingungen.

⁵⁾ H. Oschatz: Geortetes Auswuchten. Z. VDI 88 (1944), S. 357—363. (Erste Beschreibung der elektrodynamischen Auswuchtmaschinen Bauart Schenck-Federn.)

E. Elasto- und Plastomechanik.

Bericht über eine Arbeit von O. F ö p p l: Die Dämpfung, die bei Wechselbeanspruchung von vorbelasteten Drehstäben auftritt¹⁾.

Von W. Oppelt in Braunschweig.

1. Die praktische Wichtigkeit der Frage.

Drehstäbe werden als Ersatz für Schraubenfedern neuerdings viel verwendet. Im praktischen Betrieb der Feder lagert sich über die Vorspannung τ_1 eine Wechselbeanspruchung $\pm \tau_2$. Es soll die Dämpfung bestimmt werden, die bei Vorspannung mit der Wechselbeanspruchung verbunden ist.

2. Abhängigkeit der Dämpfung.

Die Dämpfung hängt einerseits vom Werkstoff und andererseits von den Versuchsbedingungen, d. h. von der Vorspannung τ_1 und der Größe der überlagerten Schwingungsbeanspruchung τ_2 ab. So viel ich weiß, ist bisher kein Ansatz gemacht worden, um für diesen Belastungsfall die Größe der bezogenen Dämpfungsarbeit anzugeben, wenn die Versuchsbedingungen bekannt sind.

3. Einfluß des Werkstoffes.

Die Dämpfung im praktischen Betrieb hängt ganz wesentlich von den Dämpfungseigenschaften des Werkstoffes ab. Die Dämpfung des Werkstoffes wird durch die Dämpfungskurve $\psi_{\text{Schw}} = f(\tau_{\text{Schw}})$ angegeben, die für reine Schwingungsbeanspruchung innerhalb der Grenzen $\pm \tau_{\text{Schw}}$ aufgestellt ist. Wenn man Angaben über die Dämpfung von vorbelasteten Drehstäben, die übergelagerte Schwingungen auszuhalten haben, machen will, muß diese Abhängigkeit bekannt sein.

4. Aufstellung einer Gleichung für die verhältnismäßige Dämpfung ψ_1 .

Auf Grund meiner bisherigen Versuchsergebnisse schlage ich vor, daß die verhältnismäßige Dämpfung ψ_1 der übergelagerten Schwingung gleich ψ_{Schw} gesetzt wird, wobei ψ_{Schw} für einen

¹⁾ Die Arbeit erscheint im Ing.-Arch. 1947.

Schwingungsausgang gilt, der gleich dem größten bei der überlagerten Schwingung auftretenden Beanspruchung ist. Wir vergleichen also den tatsächlichen Beanspruchungszustand zwischen den Grenzen $(\tau_1 + \tau_2)$ und $(\tau_1 - \tau_2)$ mit einer reinen Schwingungsbeanspruchung τ_{Schw} , wobei:

$$\tau_{\text{Schw}} = \tau_1 + \tau_2 \quad \dots \quad (1).$$

Unter der verhältnismäßigen Dämpfung ψ_1 verstehen wir die bei der überlagerten Schwingung in Wärme umgesetzte Verlustarbeit A_V während einer vollen Schwingung, geteilt durch die Formänderungsarbeit A_F , die der überlagerten Schwingungsbeanspruchung τ_2 ohne Rücksicht auf die Vorlast zugeordnet ist. Es ist also:

$$A_V = \psi_1 A'_F = \psi_{\text{Schw}} A'_F \quad \dots \quad (2).$$

5. Kritik des Ansatzes.

Der Ansatz besagt, daß die verhältnismäßige Dämpfung ψ_1 (mit Vorlast) bei einem Werkstoff (z. B. Gummi), bei dem ψ_{Schw} unabhängig von der Größe der Schwingungsbeanspruchung τ_{Schw} ist, nicht von der Vorlast abhängt. Für Stahlfedern trifft diese Angabe nicht zu. ψ_{Schw} hängt bei Stahlfedern sehr stark von der Größe τ_{Schw} der Beanspruchung ab.

Dadurch, daß die verhältnismäßige Dämpfung ψ_1 gleich demjenigen Wert ψ_{Schw} gesetzt wird, bei dem nach Gl. (1) gleiche Spannungsgrößtwerte auftreten, gilt Gl. (2) auch für den Extremfall $\tau_1 = 0$.

6. Die Dämpfung bei Ursprungsbeanspruchung.

Es soll noch die Dämpfung berechnet werden, die zur Ursprungsbeanspruchung (d. h. innerhalb der Grenzen $\tau_{\min} = 0$ und $\tau_{\max} = \tau_u$) gehört. Wenn der plastische Anteil klein ist gegenüber dem elastischen, folgt aus $\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2} \tau_{\text{Schw}}$, daß die Formänderungen entsprechend gleich sind: $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2} \gamma_{\text{Schw}}$. Die Formänderungsarbeit A'_F , die der überlagerten Schwingungsbeanspruchung zugeordnet ist, ist 1/4 der Formänderungsarbeit A_F die zur Schwingungsbeanspruchung τ_{Schw} zugehört. Der Ansatz führt also zu dem Ergebnis, daß die Dämpfungsarbeit je Schwingung bei Ursprungsbeanspruchung innerhalb der Grenzen Null und τ_{\max} ein Viertel der Dämpfungsarbeit ist, die zur Schwingungsbeanspruchung $\pm \tau_{\max}$ zugehört.

Die nachträgliche Berücksichtigung von Querschnittsänderungen bei statisch unbestimmten Systemen.

Von K. Kammüller in Karlsruhe.

Bei der Berechnung statisch unbestimmter Systeme muß man bekanntlich von bestimmten Annahmen über die gegenseitigen Verhältnisse der Querschnitte ausgehen. Erst die Durchrechnung zeigt, ob diese Verhältnisse richtig gewählt sind, richtig, d. h. so, daß das Material gut ausgenutzt ist. Erweisen sich einzelne Änderungen als notwendig, so ist es möglich mit Benützung der Koeffizienten der reziproken Matrix (ich bezeichne sie in meinem Unterricht als Einflußzahlen) die bereits erhaltenen Werte für die Berechnung der neuen unbestimmten zu benutzen. Für die Berechnung geht man von folgendem Schema aus:

	$\bar{X}_1 =$	$\bar{X}_2 =$	\vdots	$\bar{X}_s =$	L
e_{1s}	$V_{11} + \Delta V_{11}$	$V_{12} + \Delta V_{12}$	\vdots	$V_{1s} + \Delta V_{1s}$	$L_1 + \Delta L_1$
e_{2s}	$V_{21} + \Delta V_{21}$	$V_{22} + \Delta V_{22}$	\vdots	$V_{2s} + \Delta V_{2s}$	$L_2 + \Delta L_2$
	$\dots \dots \dots$	$\dots \dots \dots$	\vdots	$\dots \dots \dots$	$\dots \dots \dots$
e_{rs}	$V_{r1} + \Delta V_{r1}$	$V_{r2} + \Delta V_{r2}$	\vdots	$V_{rs} + \Delta V_{rs}$	$L_r + \Delta L_r$
	$\dots \dots \dots$	$\dots \dots \dots$	\vdots	$\dots \dots \dots$	$\dots \dots \dots$

$$\bar{X}_1 \sum_i e_{is} \Delta V_{i1} + \bar{X}_2 \sum_i e_{is} \Delta V_{i2} + \dots \bar{X}_s (1 + \sum_i e_{is} \Delta V_{is}) = \bar{X}_s + \sum_i e_{is} \Delta L_i.$$

Hierin bezeichnet die \bar{X} die neuen statisch Unbestimmten, die Δv die Verbesserungen der Elastizitäts-Koeffizienten. Links sind die Einflußzahlen der Reihe s angeschrieben. Vervielfacht man jede Gleichung mit der neben ihr stehenden Einflußzahl und addiert die sämtlichen, so erhält man

die s -te Gleichung für die Berechnung der \bar{X} . In der Regel werden die Δv klein sein. Dann ist das Diagonalglied in der Matrix erheblich größer als die anderen, eine stufenweise Berechnung also leicht durchzuführen. Im allgemeinen werden nur einige Δv von 0 verschieden sein, so daß dann die Gleichungen leicht aufzustellen und zu berechnen sind. Auch die geänderten Einflußzahlen $\bar{e}_{s,r}$ können ähnlich berechnet werden, worauf hier nicht eingegangen zu werden braucht. Sind die Δv nicht klein gegenüber den v , so bringt die vorgeschlagene Berechnung mit den Elastizitätszahlen keine Vorteile gegenüber einer vollständig neuen Berechnung.

Die Ermittlung des Schalungsdruckes von frisch eingefülltem Beton unter Berücksichtigung der Erhärtung und Reibung.

Von Karl Karas in Walldorf.

Berücksichtigt man nur Gewicht und Wandreibung des Schüttgutes, so erhält man für den Wanddruck p_w bzw. Schichtendruck p_s einer um y unter der obersten Schicht befindlichen Schicht des Schüttgutes bekanntlich:

$$p_w = p_s \lambda_0 = \gamma \lambda_0 R (1 - e^{-y/R}).$$

Hierin bedeutet γ das Raumgewicht des Schüttgutes, $\lambda_0 = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varrho}{2}\right)$ mit ϱ als natürlichem Böschungswinkel des Schüttgutes einen Erddruckkoeffizienten und $R = \frac{F}{U \lambda_0 f'}$ mit $f' = \tan \varrho'$ als Reibungskoeffizienten (ϱ' als Reibungswinkel) zwischen Schüttgut und Behälterwand einen durch λ_0 und f' modifizierten Profilradius; F ist die konstante Querschnittsfläche des Behälters, U deren Umfang.

Diese sonst bewährte Theorie bedarf bei Beton infolge seiner mit der Erhärtung verbundenen Verfestigung einer Erweiterung. Da der Endzustand ein Ergebnis seiner Vorgeschichte ist, empfiehlt sich eine integrale Betrachtungsweise, die außerdem den Vorteil in sich birgt, leicht kontrollierbare und nomographisch auswertbare Näherungslösungen zu liefern.

Ist $v(\eta)$ die Arbeits- oder Aufschüttgeschwindigkeit, so ist die Zeitdifferenz $t_x - t_z$ der Aufschüttung einer Schichte der Höhe x bzw. z über dem Boden durch

$$t_x - t_z = \int_z^x \frac{d\eta}{v(\eta)}$$

gegeben und somit kann

$$\tau = \frac{t_x - t_z}{T} = \frac{1}{T} \int_z^x \frac{d\eta}{v(\eta)}$$

mit T als Erhärtungszeit als Maß des Erhärtungszustandes gelten, da es zu Beginn mit $x = z = 0$ den Wert $\tau = 0$, bei voller Erhärtung $t_x - t_z = T$ aber den Wert $\tau = 1$ annimmt. Mittels des anschaulichen Ansatzes

$$dp_w = dp_s \lambda_0 \Phi(x, z) = dp_s \lambda_0 \left[1 - \frac{1}{T} \int_z^x \frac{d\eta}{v(\eta)} \right]$$

folgt dann leicht aus der Gleichgewichtsbedingung eines Schüttgutkörpers zwischen den Schichten z und x :

$$F p_s(x, z) = F \gamma (x - z) - f' U \int_z^x p_w(x, \xi) d\xi$$

durch Differentiation und Nullsetzung der mit dx bzw. dz multiplizierten Glieder:

$$\frac{\partial p_w(x, z)}{\partial x} = \Phi(x, z) \left[\gamma \lambda_0 - \frac{1}{R} \int_z^x \frac{\partial p_w(x, \xi)}{\partial x} d\xi \right] \dots \dots \dots (I),$$

$$\frac{\partial p_w(x, z)}{\partial z} = \Phi(x, z) \left[-\gamma \lambda_0 + \frac{p_w(x, z)}{R} \right] \dots \dots \dots (II).$$

Für den praktisch wichtigen Fall $v = v_0 = \text{konst.}$ erhält man aus (II) mit $h = v_0 T$:

$$p_w(x, z) = \gamma \lambda_0 R \left[1 - e^{-\left(\frac{y}{R} - \frac{y^2}{2hR}\right)} \right],$$

worin $y = x - z$ ist. Für $v_0 T = h = \infty$ folgt hieraus wieder die obige Lösung p_w der einfachen Theorie. Schreibt man (II) in Form einer Integralgleichung:

$$p_w(x, z) = -\gamma \lambda_0 \int_z^x \Phi(x, \xi) d\xi + \frac{1}{R} \int_z^x \Phi(x, \xi) p_w(x, \xi) d\xi \quad \dots \quad (II'),$$

so kann auch (II') ebenso wie die Integrodifferentialgleichung (I) mit nachträglicher Integration nach x und Beachtung der Anfangsbedingung $p_w(x, x) = 0$ durch Iteration ausgenutzt werden, so daß die beiden Scharen von Näherungslösungen $p_w(x, z)$ eine erwünschte Kontrolle gestatten. Im oben erwähnten einfachen Fall $v = v_0$ werden sie identisch. Mittels des einfachen Ansatzes $\frac{\partial p_w(x, \xi)}{\partial x} = \gamma \lambda_0$ für (I) oder $p_w(x, \xi) = \gamma \lambda_0 (x - \xi)$ für (II') erhält man nach je einmaliger Iteration:

$$p_w(x, z) = \gamma \lambda_0 R \left[\frac{y}{R} - \left(\frac{1}{2hR} + \frac{1}{2R^2} \right) y^2 + \frac{1}{3hR^2} y^3 \right], \quad y = x - z.$$

Hiermit gewinnt man für eine Säule von kreisförmigem Querschnitt mit $r = 2$ m, $\lambda_0 = 0,5$, $f' = 0,2$, also $R = 10$ m, $T = 12$ h, $v_0 = 0,25$ m/h, also $h = 3$ m die in der 2. Kolonne der Tabelle unter Näherg. angegebenen Werte, denen in der 3. Kolonne die strengen Werte unter Streng und in der letzten Kolonne die Werte der einfachen Theorie unter p_{w_0} beigelegt sind. Man erkennt

y m	Näherg. kg/m ²	Streng kg/m ²	p_{w_0} kg/m ²	y m
1	1033	1040	1238	1
2	1589	1622	2357	2
3	1755	1811	3370	3

sowohl die praktisch ausreichende Güte der einfachen Näherung, als auch die große Herabsetzung des Wanddruckes p_{w_0} durch die Verfestigung, was unter Umständen die Kosten des Schalungsgestütes bedeutend verbilligen kann. Eine weitere Herabsetzung — allerdings auf Kosten der Festigkeitseigenschaften des Betons — erhält man durch Lagerung des aufbereiteten Betons vor seiner Einschichtung. Für diesen und weitere Fälle mit einfachen, praktisch aber wichtigen Geschwindigkeitsgesetzen $v(\eta)$ der Schichtung sollen späterhin einfache, numerisch leicht auswertbare Näherungsgesetze, sowie nach Möglichkeit auch strenge Ergebnisse angegeben werden.

Verfahren zur Bestimmung der Tragwerkformänderungen im elastisch-plastischen Zustand.

Von W. Swida in Karlsruhe.

1. Für einen Balken aus einem ideal-plastischen Baustoff ist der senkrechte Abstand zwischen einem beliebigen Punkt B der Biegelinie und der Tangente in einem anderen Punkt A gleich (Bild 1):

$$\delta = \frac{1}{EJ} \left[\sum_{(l_i)} \int Mx dx + \sum_{(l_k)} \int \frac{Mx dx}{k_e + n \cdot z} + \sum_{(l_k)} \int \frac{Mx dx}{k_e + (n_0 + n_u) z} \right] = \frac{1}{EJ} (S_e^{(m)} + S_r^{(m)}) \quad \dots \quad (1).$$

Dabei ist $S_e^{(m)}$ das statische Moment der Momentenfläche der elastisch beanspruchten Balkenbereiche in bezug auf die Vertikale durch den Punkt B , $S_r^{(m)}$ ist das statische Moment der reduzierten Momentenfläche der elastisch-plastisch beanspruchten Balkenbereiche, bezogen auf dieselbe Vertikale.

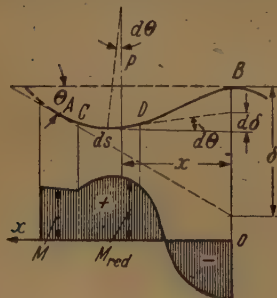


Bild 1.

Die Ordinaten der reduzierten M -Fläche sind:

$$\frac{M}{k_e + (n_0 + n_u) z} \quad \text{oder} \quad \frac{M}{k_e + n \cdot z},$$

$$k_e = \frac{J_e}{J}, \quad n_0 = \frac{S_0}{J}, \quad n_u = \frac{S_u}{J}.$$

Dabei sind J_e , S_0 und S_u das Trägheitsmoment der elastischen Zone des Querschnittes und die statischen Momente der plastischen Zonen für die Nullachse. Der Wert von

$$\Theta = \frac{1}{EJ} [F_e^{(m)} + F_r^{(m)}]$$

ergibt sich dadurch, daß man in (1) x durch 1 ersetzt. Für einen Balken mit rechteckigem Querschnitt ist

$$\delta = \frac{1}{EJ} \left[\sum_{(l_i)} \int Mx dx \pm \sum_{(l_k)} \int \frac{M_i x dx}{\sqrt{3 \mp \frac{2M}{M_f}}} \right] \quad \dots \quad (2).$$

Die Werte der Formänderungen nach der Gl. (2) können in Elementarfunktionen nur dann erhalten werden, wenn das Biegemoment M eine Funktion ersten oder zweiten Grades der Koordinate x ist. Wird das Veränderungsgesetz von M durch eine ganze algebraische Funktion von einem Grad größer als 4 ausgedrückt, so führt die Ermittlung der Formänderungen auf hyperelliptische Integrale. Wenn M durch eine ganze algebraische Funktion dritten oder vierten Grades von x ausgedrückt wird, so kann man die Lösung durch elliptische Legendresche Integrale erster und zweiter Gattung erhalten. Einige Aufgaben dieser letzten Art wurden vom Verfasser untersucht.

2. Stellt die Kurve $0 A B$ die Abhängigkeit zwischen einer verallgemeinerten Kraft P und der entsprechenden Verschiebung δ dar, so liefert das Diagramm der Bild 2 folgende Zusammenhänge:

$$\frac{dU}{d\delta} = \frac{d(U_e + U_r + U_w)}{d\delta} = P \quad \dots \quad (I);$$

$$\frac{dU_k}{dP} = \frac{d(U_e + U_r)}{dP} = \delta \quad \dots \quad (II);$$

$$\frac{dU_e}{dP} = \delta_e \quad \dots \quad (III);$$

$$\frac{dU_r}{dP} = \delta_r \quad \dots \quad (IV).$$

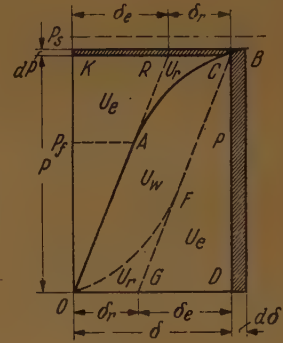


Bild 2.

Dabei ist U die gesamte Arbeit (Fläche $0 A C D$), U_e die elastische Energie (Fläche $0 K R$), U_r die Energie der Restformänderungen (Fläche $A R C$), U_w die verlorene Energie (Wärmeenergie — Fläche $0 A C F 0$). Die gesamte Biegeenergie $U_k = U_e + U_r$ eines beliebigen Tragwerkes ist:

$$U_k = \sum_{(i_k)} \int \frac{M^2 dx}{2 E J} + \sum_{(i_k')} \left[\int_0^{M_f} \frac{M dM}{E J} + \int_{M_f}^M \frac{M dM}{E (J_e + S \cdot z)} \right] dx + \dots (3).$$

$$+ \sum_{(i_k)} \left[\int_0^{M_f} \frac{M dM}{E J} + \int_{M_f}^{M'} \frac{M dM}{E (J_e + S \cdot z)} + \int_{M'}^M \frac{M dM}{E [J_e + (S_0 + S_u) z]} \right] dx$$

Die Anwendung der Gl. (I—IV) liefert ein zweites Verfahren zur Bestimmung der Tragwerkformänderungen:

3. Wird ein krummer Stab (Bild 3) mit kreisförmiger Achse auf reine Biegung elastisch-plastisch beansprucht, so lassen sich die Spannungen des elastischen Bereiches folgendermaßen darstellen:



Bild 3.

$$\sigma_t = \frac{\sigma_s}{N_1 \varrho r^2} \left\{ \varrho_1^2 r^2 \left[\varrho \left(\ln \frac{b \varrho_1}{r^2} + 2 \ln \frac{b}{\varrho_1} \cdot \ln \frac{r}{\varrho} - 2 \right) + a \left(1 + \ln \frac{r}{\varrho_1} \right) \right] + \dots (4); \right.$$

$$\left. + a \varrho^2 \left[r^2 \ln \frac{r}{\varrho} + \varrho_1^2 \left(\ln \frac{\varrho_1}{\varrho} - 1 \right) \right] + \varrho^3 \left[r^2 + \varrho_1^2 \left(1 - \ln \frac{b}{\varrho_1} \right) \right] \right\}$$

$$\sigma_r = \frac{\sigma_s}{N_1 \varrho r^2} \left\{ \varrho_1^2 r^2 \left[\varrho \left(\ln \frac{\varrho_1^3}{b r^2} + 2 \ln \frac{b}{\varrho_1} \cdot \ln \frac{r}{\varrho} \right) + a \ln \frac{r}{\varrho_1} \right] + \dots (5). \right.$$

$$\left. + \varrho^2 \cdot \varrho_1^2 \left[\varrho \left(\ln \frac{b}{\varrho_1} - 1 \right) + a \left(1 - \ln \frac{\varrho_1}{\varrho} \right) \right] + \varrho^2 r^2 \left[a \left(\ln \frac{r}{\varrho} - 1 \right) + \varrho \right] \right\}$$

$$N_1 = \varrho^2 + \varrho_1^2 + 2 \cdot \varrho_1^2 \ln \frac{\varrho_1}{\varrho}.$$

Für den plastischen Bereich: $\sigma_t^u = \sigma_s$, $\sigma_r^u = \sigma_s \left(1 - \frac{a}{r} \right)$, $\sigma_r^o = \sigma_s \cdot \ln \frac{b}{r}$, $\sigma_t^o = -\sigma_s \left(1 - \ln \frac{b}{r} \right)$. Die Werte von ϱ und ϱ_1 können aus einer Kontinuitätsbedingung und einer Gleichgewichtsbedingung bestimmt werden. Diese Gleichungen werden hier nicht angeführt. Ein Näherungsverfahren, welches vom Verfasser zur Ermittlung von σ_t aufgestellt wurde, bringt genügende Genauigkeit.

¹⁾ Den Satz (II) hat J. Fritzsche auf einem anderen Weg bewiesen. Z. angew. Math. Mech. 11 (1931), S. 176—191. Siehe auch K. Hohenemser: Ing.-Arch. 1 (1930), S. 271—292.

Bericht über eine Arbeit von O. Föppl: Die günstigsten Werte für das Oberflächendrücken von zylindrischen Drehstabfedern.¹⁾

Von G. Denkhaus in Braunschweig.

1. Praktische Bedeutung der Versuche.

Die Dauerhaltbarkeit ist stark von der Oberflächenbeschaffenheit abhängig. Man kann die Dauerhaltbarkeit erhöhen, wenn man die Oberfläche plastisch verdichtet. Für zylindrische Bauteile, z. B. Drehstabfedern im Fahrzeugbau, empfiehlt sich das Oberflächendrücken mit Hilfe umlaufender schmaler Rollen, die unter einem bestimmten Anpreßdruck mit Vorschub über das Werkstück geführt werden.

2. Die Wirkung des Oberflächendrückens.

Infolge des Drückens werden die Elemente der Oberflächenschicht über die Fließgrenze beansprucht, wodurch Risse und Fehlstellen im Material geschlossen werden: die Randzone wird verdichtet. Außerdem bildet sich infolge der plastischen Verformung in axialer und tangentialer Richtung ein elastischer Druckspannungszustand aus, dem ein elastischer Zugspannungszustand in der plastisch unverformten Kernzone entspricht.

Will man die plastische Verformung und damit die Dauerhaltbarkeitssteigerung als Folge der Verdichtung und des Druckeigenspannungszustandes in Formeln ausdrücken, so muß man kennen:

1. den Zusammenhang zwischen plastischer Verformung und Spannung der Randelemente.
2. Die Größe und den örtlichen Verlauf der Spannung, d. h. vornehmlich die Randspannung σ_{\max} und die Dicke der Zone t , innerhalb deren die Spannung von σ_{\max} auf Null fällt, in Abhängigkeit von Anpreßdruck P , Vorschub s und Abrundungsradius r der Rolle. Die Dicke t ist die Tiefenwirkung des plastischen Verformungsvorgangs.

Verdrehungsversuche (Werkstatt u. Betrieb 1946, S. 205—208) ergaben, daß der Verformungswinkel mit steigender Spannung nicht kontinuierlich, sondern in Stufen anwächst, wenn die Fließgrenze überschritten ist. Man spricht von quantenhaftem Fließen und Fließgrenzen 1., 2., ... Grades.

3. Ähnlichkeitsbetrachtung.

Nach den Hertz'schen Gleichungen treten angenähert verhältnismäßige Spannungsbilder auf, wenn man bei konstantem Stabdurchmesser D und konstantem Rollenradius R den Anpreßdruck P , den Abrundungshalbmesser r der Rolle und den Vorschub s im gleichen Verhältnis ändert. Wenn man die Hertz'schen Gleichungen auf das Oberflächendrücken eines Stabes würde anwenden können, müßte man in Zahlentafel 1 gleiche Größtspannungswerte σ_{\max} und die Tiefenwirkungen t verhältnismäßig P erhalten. Die Zahlentafel 1 zeigt aber, daß zu einer Drucksteigerung von 12 auf 120 kg nur eine Steigerung der Tiefenwirkung von 0,21 auf 0,52 (also im Verhältnis 1:2,5) gehört. Es ist daraus zu schließen, daß die Hertz'schen Gleichungen auch nicht angenähert zur Berechnung der beim Oberflächendrücken erhaltenen Werte angewendet werden können.

Zahlentafel 1.

P kg	r mm	s mm/Umdr.	t mm	σ_{\max} kg/mm ²
12	0,1	0,04	0,21	130
48	0,4	0,16	0,31	130
120	1,0	0,4	0,52	130

4. Verschiedene Versuchsbedingungen.

Es ist der Einfluß der Veränderung des Druckes P bei gleichem Vorschub s auf die größte Eigenspannung σ_{\max} und auf die Tiefenwirkung t und der Einfluß einer Veränderung des Vorschubs s bei konstantem P und r bestimmt worden. Es konnte keine einfache Beziehung festgestellt werden, mit deren Hilfe man σ_{\max} und t hätte bestimmen können, wenn P , r und s bekannt sind.

¹⁾ Die Arbeit erscheint in „Metalloberfläche“ 1947.

KLEINE MITTEILUNGEN

Praktische Verfahren zur Lösung von Gleichungen vierten Grades¹⁾.

Einleitung.

Zur Feststellung der Stabilität linearer Schwingungssysteme genügt es im allgemeinen zu wissen, daß die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sämtlich einen negativen Realteil besitzen, da dann die auftretenden Schwingungen gedämpft sind. Interessiert man sich jedoch eingehender für das Problem und will den Grad der Dämpfung wissen, so muß die charakteristische Gleichung tatsächlich gelöst werden. Der Absolutbetrag des (negativen) Realteils gibt dann den Grad der Dämpfung an. Für die Gleichungen 5. und höheren Grades ist man auf die bekannten Näherungsverfahren, im wesentlichen auf das Graeffesche und das Newtonsche Verfahren angewiesen. Dagegen sind für Gleichungen 4. Grades in den letzten Jahren einige Verfahren entwickelt worden, die schneller zum Ziele führen.

Ziel der Arbeit ist, die Verfahren einheitlich darzustellen und den nötigen Rechenaufwand anzugeben.

Gemeinsames Prinzip aller Verfahren.

Aus der gegebenen Gleichung

$$f(x) \equiv x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1)$$

folgt nach den Viëtaschen Sätzen sofort das System

$$\left. \begin{aligned} -a_3 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ a_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 \\ -a_1 &= x_2 x_3 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_3 \\ a_0 &= x_1 x_2 x_3 x_4 \end{aligned} \right\} (2),$$

das Gleichung (1) völlig äquivalent ist; die x_i sind die Wurzeln der Gleichung (1). Man muß nun danach trachten, zu dem System (2) eine weitere Gleichung $q = q(x_i)$ hinzuzugewinnen, so daß diese Wurzelfunktion q einmal zusammen mit dem System (2) eine schnelle Wurzelberechnung gestattet, sich aber auch leicht aus den Koeffizienten a_i der Gleichung (1) berechnen läßt. Es gelingt, für q dreiwertige Wurzelfunktionen anzugeben, die zusammen mit dem System (2) eine Wurzelberechnung mit Hilfe der vier Grundrechnungsarten und des Quadratwurzelziehens gestattet. Die kubische Gleichung zur Berechnung der dreiwertigen Wurzelfunktionen bezeichnet man als „Resolvente“.

Dies war der Theorie schon längst bekannt²⁾. Der Vorteil der gezeigten Verfahren besteht darin, daß die Formeln so umgestaltet sind, daß nur eine Wurzel der Resolvente, die stets reell ist, berechnet zu werden braucht. Die Verfahren liefern sämtliche 4 Wurzeln in einem Rechnungsgang. Man kann außer den drei gezeigten noch weitere dreiwertige Wurzelfunktionen angeben, die ebenfalls zur Lösung der Gleichung 4. Grades herangezogen werden könnten³⁾, aber der Rechenaufwand ist größer als bei den angegebenen Verfahren.

Bezeichnungen:

Zur Abkürzung werden Summe s , Differenz d und Produkt p je zweier Wurzeln eingeführt,

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= s_1; & x_1 - x_2 &= d_1; & x_1 x_2 &= p_1; \\ x_3 + x_4 &= s_2; & x_3 - x_4 &= d_2; & x_3 x_4 &= p_2 \end{aligned} \right\} (3).$$

Beim Auftreten komplexer Wurzeln sollen die Paare konjugiert komplexer Wurzeln mit x_1, x_2 bzw. x_3, x_4

¹⁾ Mitt. des Lehrstuhls für angew. Math. der Techn. Hochschule Dresden, Prof. Fr. A. Willers.

²⁾ Siehe z. B.: Enzykl. math. Wissensch. I B 3 d 17, S. 501–503. — Pascal, Repertorium der höh. Math., 2. Aufl., Bd. I, 1, S. 285–289.

³⁾ Siehe z. B.: M. J. I. Craig, Bull. Inst. Egypte, Bd. XVI 1934, S. 140.

bezeichnet werden, so daß in diesem Fall die s_i und p_i ebenfalls reell, die d_i rein imaginär sind. Gleichung (1) kann man stets in zwei quadratische Faktoren zerlegen,

$$f(x) \equiv (x^2 - s_1 x + p_1)(x^2 - s_2 x + p_2) = 0 \quad (4),$$

und das System (2) schreibt sich

$$-a_3 = s_1 + s_2 \quad (5a),$$

$$a_2 = p_1 + p_2 + s_1 s_2 \quad (5b),$$

$$-a_1 = s_1 p_2 + s_2 p_1 \quad (5c),$$

$$a_0 = p_1 p_2 \quad (5d).$$

Verfahren 1^{a)}.

Dem System (5) wird die Gleichung

$$z = p_1 + p_2 \quad (6)$$

hinzugefügt. z ist eine dreiwertige Wurzelfunktion, es nimmt die 3 Werte

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= x_1 x_2 + x_3 x_4 \\ z_2 &= x_1 x_3 + x_2 x_4 \\ z_3 &= x_1 x_4 + x_2 x_3 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

an. Aus den Wurzeln x_i der Ausgangsgleichung (1) kann man auf die Wurzeln z_i der Resolvente schließen und umgekehrt. Es sind

im Fall I (4 Wurzeln x_i reell) alle 3 Wurzeln z_i reell,
im Fall II (2 Wurzeln x_i reell, 2 komplex) 1 Wurzel reell, 2 konjugiert komplex,
im Fall III (4 Wurzeln x_i komplex) alle 3 Wurzeln reell.

Bezeichnet man die konjugiert komplexen Wurzeln mit $x_{1,2} = u_1 \pm i v_1$ und $x_{3,4} = u_2 \pm i v_2$, so gilt in diesem Falle

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= u_1^2 + v_1^2 + u_2^2 + v_2^2, \\ z_2 &= 2(u_1 u_2 - v_1 v_2), \\ z_3 &= 2(u_1 u_2 + v_1 v_2) \end{aligned} \right\} \quad (7'),$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist dann z_1 die absolut größte (stets positive) Wurzel.

Zur Aufstellung der Resolvente berechnet man aus (5a) und (5c)

$$s_1 = \frac{a_1 - a_3 p_1}{p_1 - p_2}; \quad s_2 = \frac{a_3 p_2 - a_1}{p_1 - p_2} \quad (8)$$

und setzt die Formeln (6) und (8) in (5b) ein. Unter Berücksichtigung von (5d) ergibt sich die Resolvente

$$\left. \begin{aligned} z^3 - a_2 z^2 + (a_1 a_3 - 4 a_0) z - \\ - (a_0 a_3^2 + a_1^3 - 4 a_0 a_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9).$$

Aus (5d) und (6) gewinnt man die quadratische Gleichung für die Wurzelprodukte

$$p^2 - z p + a_0 = 0 \quad (10)$$

mit den Wurzeln

$$p_{1,2} = \frac{z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - a_0} = \frac{z}{2} \pm w \quad (11).$$

Damit wird aus (8)

$$s_1 = \frac{a_1 - a_3 p_1}{2w}; \quad s_2 = \frac{a_3 p_2 - a_1}{2w} \quad (12)$$

oder

$$s_{1,2} = -\frac{a_3}{2} \pm \frac{1}{2w} \left(a_1 - \frac{a_3}{2} z \right) \quad (13).$$

Dann hat man nur noch die beiden quadratischen Gleichungen nach (4) zu lösen.

^{a)} W. V. Lyon, J. of Math. Mass. 3 (1924), S. 188–190.

Verfahren 2⁵).

Als neue Gleichung wird

$$2y = s_1 - s_2 \dots \dots \dots (14)$$

dem System (5) zugefügt. Dies ist eine sechswertige Wurzelfunktion, aber je zwei Werte sind entgegengesetzt gleich, so daß für y^2 eine Gleichung 3. Grades bleibt.

Es sind

im Fall I alle drei y^2 positiv,
im Fall II ein y^2 positiv, die beiden anderen konjugiert komplex,
im Fall III ein y^2 positiv, zwei y^2 negativ.
Man hat stets mindestens eine positive Wurzel, die man aufsuchen kann.

Zur Ableitung der Resolvente geht man zu den Beziehungen (8) zurück und erhält

$$y = \frac{2a_1 - a_3(p_1 + p_2)}{2(p_1 - p_2)} = \frac{2a_1 - a_3z}{4w} \dots (15).$$

Dies ergibt quadriert

$$z^2 y^2 - 4a_0 y^2 = a_1^2 - a_1 a_3 z + \frac{1}{4} a_3^2 z^2 \dots (16).$$

Nun ist

$$z = a_2 + y^2 - \frac{1}{4} a_3^2 \dots \dots \dots (17),$$

und damit erhält man die Resolvente

$$\left. \begin{aligned} y^6 + \left(2a_2 - \frac{3}{4} a_3^2\right) y^4 \\ + \left(a_2^2 + \frac{3}{16} a_3^4 - a_2 a_3^2 + a_1 a_3 - \frac{1}{4} a_0\right) y^2 \\ - \left(\frac{1}{2} a_2 a_3 - a_1 - \frac{1}{8} a_3^3\right)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \dots (18).$$

Die Viëtaschen Wurzelsätze lauten in diesem Fall

$$\left. \begin{aligned} -\left(2a_2 - \frac{3}{4} a_3^2\right) &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \\ \left(\frac{1}{2} a_2 a_3 - a_1 - \frac{1}{8} a_3^3\right)^2 &= y_1^2 y_2^2 y_3^2 \end{aligned} \right\} \dots (19).$$

Dies liefert die Wurzeldifferenzen,

$$\left. \begin{aligned} d_{1,2}^2 &= -\left(2a_2 - \frac{3}{4} a_3^2\right) - \\ &- y_1^2 \pm \frac{2}{y_1} \left(\frac{1}{2} a_2 a_3 - a_1 - \frac{1}{8} a_3^3\right) \end{aligned} \right\} \dots (20).$$

Man beachte, daß die hier auftretenden Größen schon in der Resolvente (18) auftauchen, also keine weitere Rechnung erfordern.

Aus (5a) und (14) erhält man die Wurzelsummen $s_{1,2}$, und daraus ergeben sich die Wurzeln zu

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} (s_1 \pm d_1); \quad x_{3,4} = \frac{1}{2} (s_2 \pm d_2) \dots (21).$$

Verfahren 3⁶).

Genau wie die Größe y ist die Summe s zweier Wurzeln eine sechswertige Wurzelfunktion. Aber auch hier läßt sich erreichen, daß je zwei von ihnen entgegengesetzt gleich werden, indem man nämlich $f(x)$ in eine Gleichung $\psi(t) = 0$ so transformiert, daß

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0 \dots \dots \dots (22)$$

wird.

Dann hat man

im Fall I 3 positive Wurzeln s'^2 ,
im Fall II eine positive und zwei konjugiert komplexe Wurzeln s'^2 ,

im Fall III eine positive und zwei negative Wurzeln s'^2 der Resolvente.

Auch hier ist stets mindestens eine positive Wurzel vorhanden.

Die Forderung (22) wird durch die bekannte Transformation $t = x + a_3/4$ erfüllt; die transformierte Gleichung lautet dann

$$\psi(t) = t^4 + At^2 + Bt + C = 0 \dots \dots (23).$$

Die (5) entsprechenden Gleichungen lauten für $\psi(t)$

$$\left. \begin{aligned} A &= p_1' + p_2' - s'^2 \\ B &= s' (p_1' - p_2') \\ C &= p_1' p_2' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24),$$

wobei $s_1' = -s_2' = s'^2$ gesetzt ist.

$$\text{Es folgt} \quad B^2 = s'^2 [(A + s'^2)^2 - 4C] \dots \dots (25).$$

Also lautet die Resolvente

$$s'^6 + 2A s'^4 + (A^2 - 4C) s'^2 - B^2 = 0 \dots (26).$$

Die aus (3) folgenden Identitäten

$$d_1'^2 = s'^2 - 4p_1'; \quad d_2'^2 = s'^2 - 4p_2' \dots \dots (27)$$

formt man um und erhält die Wurzeldifferenzen

$$d_{1,2}'^2 = -(s'^2 + 2A) \mp \frac{2B}{s'} \dots \dots (28).$$

Die weitere Rechnung ist klar. Man berechnet

$$t_{1,2} = \frac{1}{2} (s_1' \pm d_1'); \quad t_{3,4} = \frac{1}{2} (s_2' \pm d_2') \dots (29)$$

und daraus

$$x_i = t_i - \frac{a_3}{4} \dots \dots \dots (30).$$

Zusammenfassung.

Allen drei Verfahren ist die Lösung einer Resolvente gemeinsam. Durch Auswahl einer bestimmten Wurzel der Resolvente kann man es auch im Fall komplexer Wurzeln x_i immer erreichen, daß die Größen s_i, d_i^2, p_i reell sind. Dazu hat man

bei Verfahren 1 die größte Wurzel,
bei Verfahren 2 u. 3 die positive Wurzel

aufzusuchen.

Der Rechenaufwand ist bei den drei Verfahren ungefähr gleich. Außer der Lösung der Resolvente ist allen drei Verfahren das Ausziehen von drei Quadratwurzeln gemeinsam. Eine große Erleichterung bei der Berechnung bietet die Benutzung von Rechenblättern, wie es im beigefügten Beispiel für das Verfahren 1 an der Gleichung $x^4 + 4x^3 + 27x^2 + 47x + 132 = 0$ gezeigt ist. Das Formular wird ohne weitere Erläuterungen verständlich sein.

Es folgt eine Übersicht über den nötigen Rechenaufwand für den Fall, daß sämtliche Wurzeln komplex sind. Die anderen Fälle unterscheiden sich nur unwesentlich davon.

Verfahren	1	2	3
Eintragungen ohne Rechnung	7	8	9
Additionen u. Subtraktionen	11	12	21
Einfache Multiplikationen und Divisionen ⁷⁾	4	10	6
Multiplikationen u. Divisionen	10	8	9
Wurzeln	3	3	3

Nicht eingerechnet ist die Lösung der Resolvente. Dazu benutzt man am besten ebenfalls ein Rechen-

⁷⁾ Im Kopf auszuführen.

⁵⁾ R. Rocard, Rev. sci. Paris 77 (1939), S. 4-7. — M. Eichler, J. reine angew. Math. 184 (1942), S. 128.

⁶⁾ H. Heinrich: Z. angew. Math. Mech. 21 (1941), S. 304 bis 307. — H. Sharp, J. of Math. Mass. 20 (1941), S. 248-249.

blatt, nachdem man eine erste Näherung in einem Nomogramm gefunden hat.

Lösung der Gleichung
 $x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$.

Aufstellung der Resolvente $z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$.

a_3	+	4	a_3^2	+	16	$-a_0 a_3^2$	-	2112
a_2	+	27	////////////////			$-a_1^2$	-	2209
a_1	+	47	$a_1 a_3$	+	188	Σ	-	4321
a_0	+	132	$-4 a_0$	-	528	$4 a_0 a_2$	+	14256
$\alpha = -a_2$	-	27	$\Sigma = \beta$	-	340	$\Sigma = \gamma$	+	9935

Größte Wurzel der Resolvente $z = 23,10578$

$-a_0$	-	132	$\frac{1}{4} a_1$	+	11,75
$\left(\frac{1}{2} z\right)^2$	+	133,46927	$-\frac{1}{4} a_3 \cdot \frac{1}{2} z$	-	11,55289
$\Sigma = w^2$	+	1,46927	$\Sigma = A$	+	0,19711
$-\frac{1}{2} z$	-	11,55289	$-\frac{1}{4} a_3$	-	1
w	+	1,21213	A/w	+	0,16261
$\Delta = -p_1$	-	12,76502	$\Sigma = -p_2$	-	10,34076
$\left(\frac{1}{2} s_1\right)^2$	+	0,70122	$\left(\frac{1}{2} s_2\right)^2$	+	1,35166
$\Sigma = k_1^2$	-	12,06380	$\Sigma = k_2^2$	-	8,98910
$\Sigma = \frac{1}{2} s_1$	-	0,83739	$\Delta = \frac{1}{2} s_2$	-	1,16261
k_1	$i \cdot 3,47330$		k_2	$i \cdot 2,99818$	
$\Sigma = x_1$	-	0,83739	$\Sigma = x_3$	+	1,16261
$\Delta = x_2$	$\pm i \cdot 3,47330$		$\Delta = x_4$	$\pm i \cdot 2,99818$	

$\Sigma =$ Summe, $\Delta =$ Differenz

Dresden.

G. Opitz.

Eine einfache und exakte Konstruktion des normalaxonometrischen Achsenbildes mit den Verkürzungsverhältnissen $1:\frac{1}{2}:1$.

Bei normalaxonometrischen Darstellungen wird in Wissenschaft und Technik wegen der günstigen Bildwirkung sehr häufig das Verhältnis $1:\frac{1}{2}:1$ der Verkürzungseinheiten angewendet.

In der Technik begnügt man sich derzeit entsprechend den Vorschriften der deutschen Industrienormen (DIN 5) bloß mit einer Näherungskonstruktion des Achsenbildes, wobei die Winkel der Bilder der X- und Y-Achse gegen die Bildspur der XY-Ebene mit $7^\circ 10'$ bzw. $41^\circ 25'$ angegeben werden.

Eine exakte Konstruktion des Achsenbildes, aus welcher das neue Verfahren abgeleitet wird, ergibt sich aus der allgemeinen Theorie der Verkürzungsverhältnisse¹⁾ wie folgt:

Man trägt auf einer waagrechten Geraden (Bild 1) von A aus etwa nach rechts eine beliebige Strecke s und anschließend zweimal die Strecke $4s$ auf, wodurch sich die Punkte B, C und D ergeben. Man zeichnet einen Halbkreis über BD, schneidet diesen mit einem Kreisbogen aus B mit dem Radius AB und erhält im Schnitt O das Bild des Nullpunktes des Achsenkreuzes. Die

Verbindungsgeraden von O mit D und A und die Senkrechte aus O auf AD sind die Bilder x , y und z der Achsen X, Y und Z. Die Verkürzungseinheiten werden in der üblichen Weise mit Hilfe der um AD in die Bildebene gedrehten Achsen X und Y erhalten.

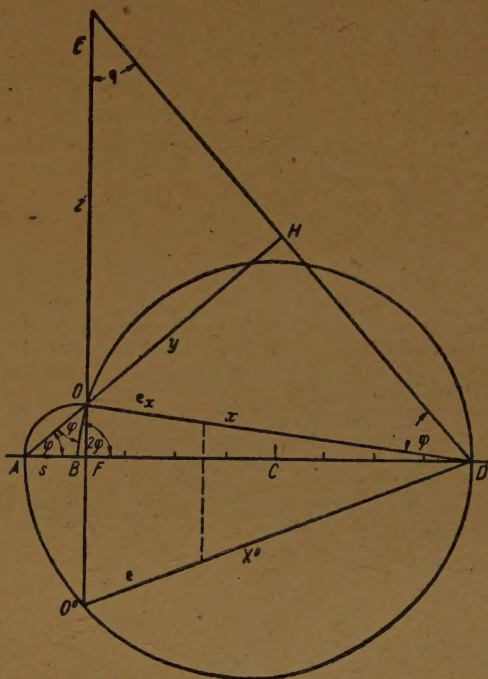


Bild 1.

Im folgenden wird gezeigt, daß sich diese Konstruktion derart vereinfachen läßt, daß sie sich mühelos dem Gedächtnis einprägt. Diese Vereinfachung ist dem Vorgehen nach DIN 5 vorzuziehen, theoretisch, weil sie exakt ist, und praktisch, weil sie nicht des Winkelmessers bedarf. Sie ist auch der Konstruktion nach Bild 1 vorzuziehen, weil sie einfacher und zeichnerisch genauer ist. Sie ist beiden überlegen durch die Einfachheit der Konstruktion der Verkürzungseinheiten bei vorgegebener Einheitsstrecke.

Das neue Verfahren wird in folgender Weise aus Bild 1 abgeleitet:

Man trage in Bild 1 die Strecke OD auf z von O nach oben auf und erhält den Punkt E. In dem so erhaltenen gleichschenkligen Dreieck ODE fällt die Höhe OH in das Bild y der Y-Achse, weil bei der vorliegenden dimetrischen Darstellung y den stumpfen Winkel zwischen x und z halbiert. Die gleichschenkeligen Dreiecke DEO und AOB sind ähnlich, weil die Schenkel entsprechender Winkel aufeinander senkrecht stehen.

Es ist $\cos(DBO) = \cos 2\varphi = BO:BD = \frac{1}{8}$, folglich

$\cos \varphi = \frac{3}{4}$. Daher $EO:EH = 4:3$ und $EO:ED = 2:3$. Demnach stellen sich die Achsenbilder x , z und y als Schenkel und Höhe eines gleichschenkeligen Dreieckes dar, dessen Schenkel zur Basis sich wie $2:3$ verhalten²⁾.

Zur Ermittlung der Verkürzungseinheiten e_x , e_y , e_z bei vorgegebener Längeneinheit e dreht man (Bild 1)

¹⁾ Der Wert $\cos \varphi = \frac{3}{4}$ findet sich bereits bei M. H. und C. Th.

Meyer, Axonometrische Projektionslehre, Leipzig, 1855—1863, S. 108—110 u. 118 vor und wird auch von Th. Schmid, Darstellende Geometrie (Sammlung Schubert), 3. Aufl., S. 266 angegeben. Doch wurde bisher der entscheidende Schritt zu Dreieck DEO als Konstruktionsgrundlage nicht gemacht.

²⁾ Vgl. etwa Müller-Kruppa: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, 4. Aufl. Leipzig und Berlin 1936, S. 275.

den Nullpunkt des Achsenkreuzes in der üblichen Weise um AD in die Bildebene (Schnitt von z mit Halbkreis über AD nach unten) und erhält den Punkt O^0 . Es läßt sich nun, wie folgt, zeigen, daß $OO^0 = \frac{1}{2} OD$ ist. Nimmt man die Strecke AB als Einheit, so ist:

$$BF = 1 \cdot \cos 2\varphi = \frac{1}{8}, \quad OF = \sqrt{1 - \frac{1}{8^2}} = \frac{1}{8} \sqrt{63},$$

$$OD = \sqrt{8^2 - 1} = \sqrt{63}, \quad FO^0 = AF \cdot FD = \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \left(8 - \frac{1}{8}\right),$$

$$\text{demnach } FO^0 = \frac{3}{8} \sqrt{63} \text{ und } OO^0 = OF + FO^0 = \frac{1}{8} \sqrt{63} + \frac{3}{8} \sqrt{63} = \frac{1}{2} \sqrt{63} = \frac{1}{2} OD.$$

Trägt man demnach die Strecke $\frac{1}{2} OD$ auf z von O nach abwärts auf, so hat man bereits ohne eine besondere Konstruktion den gedrehten Nullpunkt O^0 und in O^0D die in die Bildebene gedrehte X -Achse X^0 .

Jetzt trägt man auf X^0 die Einheitsstrecke e auf und projiziert sie in der Richtung von z auf x , wodurch die Verkürzungseinheit e_x erhalten wird.

Auf Grund der nachgewiesenen Zusammenhänge ergibt sich das neue Konstruktionsverfahren folgendermaßen (Bild 2):

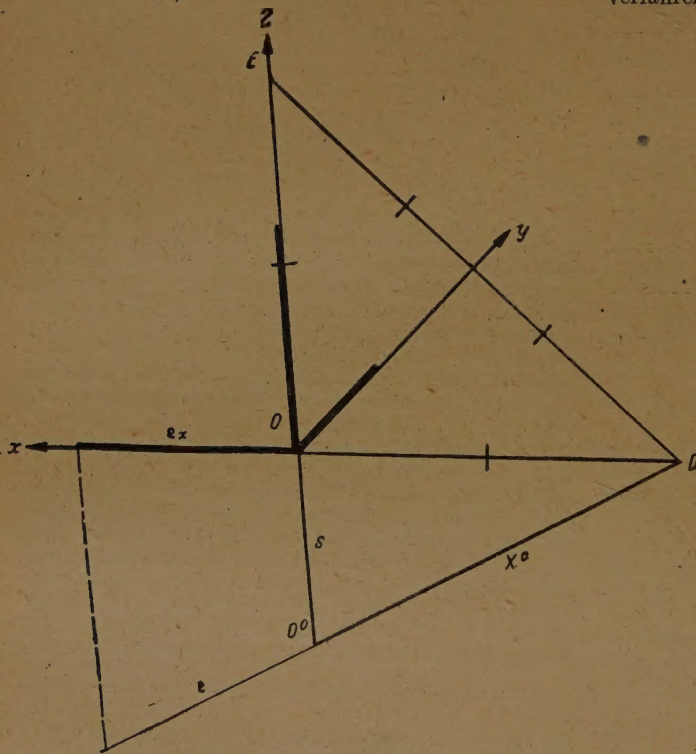


Bild 2.

„Man zeichnet das Bild z der Z -Achse, trägt auf demselben vom Nullpunkt O die beliebige Strecke s einmal nach unten und zweimal nach oben auf und erhält die Endpunkte O^0 und E . Legt man nun an O $E = 2s$ als Schenkel ein gleichschenkeliges Dreieck mit der Grundlinie $ED = 3s$, so stellen die Schenkel und die Höhe auf die Grundlinie die Achsenbilder x, z, y dar, während die Verbindungsgerade O^0D die in die Bildebene umgelegte X -Achse X^0 ist. Mit der Einheitsstrecke e auf

¹⁾ Die Strecke s wird mit Rücksicht auf die zeichnerische Genauigkeit und den Bildumfang entsprechend groß gewählt.

X^0 sind dann die Verkürzungseinheiten $e_x = 2e_y = e_z$ bestimmt.“

Herrn Prof. Dr. E. Kruppa, Wien, bin ich für sein förderndes Interesse an dieser Konstruktion zu besonderem Danke verpflichtet.

Wien.

A. Praetorius.

Nachweis der Eindeutigkeit der Schwingweg- und Beschleunigungs-Aufzeichnung stoßartig verlaufender Vorgänge durch geeignete Analyse.

Das Problem der Analyse von Registrierkurven stoßartig verlaufender Vorgänge wird seit längerer Zeit in der Literatur behandelt, ohne daß bisher eine befriedigende Lösung erreicht worden ist¹⁾. Die angewandten Analyseverfahren beruhen auf der Interpolation der charakteristischen Größen von Wellen, deren Vorhandensein in der Registrierkurve aus irgend welchen Gründen substituiert wird. Dabei kommt man jedoch meistens nur zu einer unzureichenden Erfassung der Registrierkurve und zu erheblichen Abweichungen, wenn diese Verfahren auf die gleichzeitige Registrierung des Weg-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverlaufes desselben Stoßvorganges angewandt werden, da man insbesondere die Frequenzen und das Amplitudengesetz der Wellen von vornherein nicht kennt, aus denen die Registrierkurve wesentlich besteht²⁾. Der Verfasser hat in einer früheren Arbeit³⁾ ein Analyseverfahren unter Heranziehung der Periodogrammrechnung bewiesen, durch das man ohne die Notwendigkeit zu mehr oder weniger willkürlich erscheinenden Annahmen über etwaige maßgebliche Wellenelemente in der Registrierkurve die Frequenzen und das Amplitudengesetz erhält, aus denen man dann die übrigen charakteristischen Größen leicht bestimmen kann. Die Periodogrammrechnung ist zur Lösung dieser Aufgabe dadurch besonders geeignet, weil sie eine Mittelwertbildung in sich schließt, durch welche zunächst

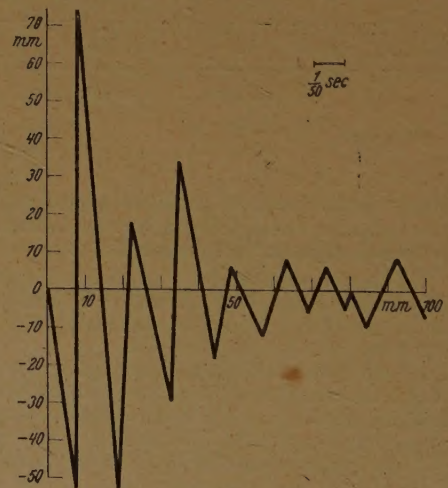


Bild 1.

nur die wesentlichen Eigenschaften der in der Registrierkurve enthaltenen Wellen zum Vorschein kommen. Diese Mittelbildung erfolgt sehr genau, wenn man einen genügend präzise arbeitenden harmonischen Analysator (z. B. Coradi) benutzt. Die Analyse kann von einer Hilfskraft ausgeführt werden.

¹⁾ Martin: Phys. Z. Bd. 43 (1942), Heft 13. Dortselbst weitere Literaturangaben.

²⁾ Martin, Z. Geophys. 15 (1939), Heft 5/6. — Weygandt-Risch, Z. Instrumentenkde. 62 (1942), Novemberheft.

³⁾ Blume: Z. angew. Math. Mech. Bd. 23 (1943), Heft 6.

Im Folgenden wird an einem praktischen Beispiel dargestellt, daß die aus einer Beschleunigungsaufzeichnung errechnete Wegkurve desselben Stoßvorganges

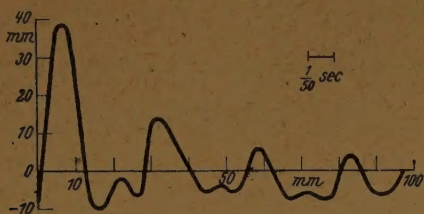


Bild 2.

wandfrei sind. Bild 1 zeigt die vertikale Beschleunigungsregistrierung und Bild 2 die vertikale Wegregistrierung desselben Stoßvorganges, der von Martin²⁾ beschrieben und dem Verfasser zwecks Analyse übersandt wurde. Die Erschütterung entsteht durch das Hinterrad eines über einen Keil fahrenden Vollgummikraftwagens auf der Versuchsstraße in Braunschweig. Bild 3 gibt das Phasen- und Bild 4 das Amplitudendiagramm der Kurve nach Bild 1 wieder. Aus beiden errechnet man die Welle

$$Y_1 = 67,2 e^{-0,04t} \sin \frac{2\pi}{13,6} t$$

nach dem zitierten Verfahren (Blume l. c.). Analog

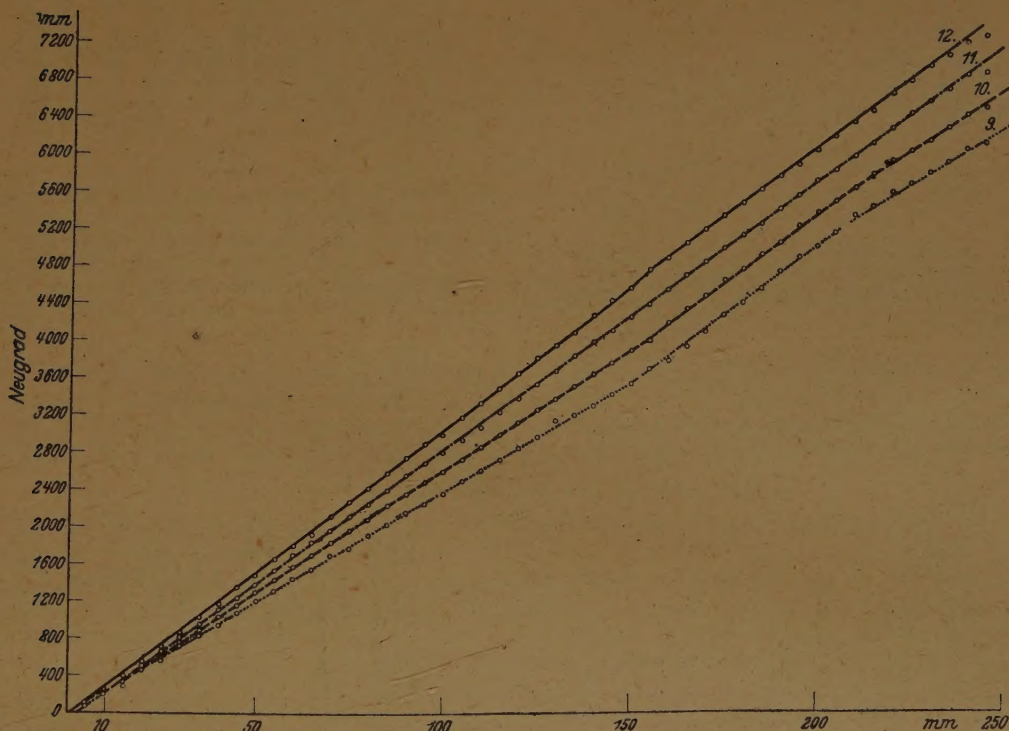


Bild 3.

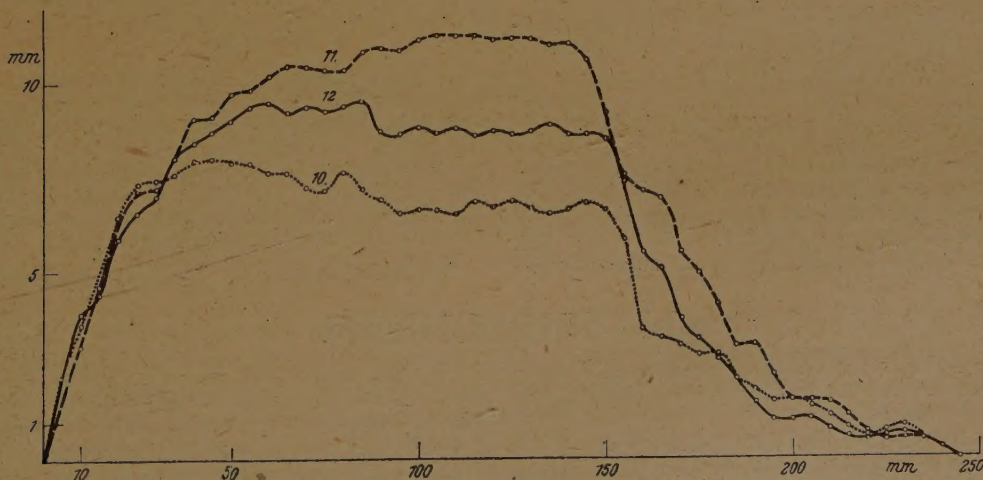


Bild 4.

und die aus einer Wegregistrierung errechnete Beschleunigungskurve mit den entsprechenden Registrierkurven selbst übereinstimmen, wenn die Meßapparate und die Durchführung der Messungen ein-

findet man die Welle:

$$Y_2 = 27,0 e^{-0,04t} \sin \frac{2\pi}{30} t.$$

Die Addition beider Wellen ergibt Bild 5. Die Übereinstimmung mit Bild 1 ist wesentlich.

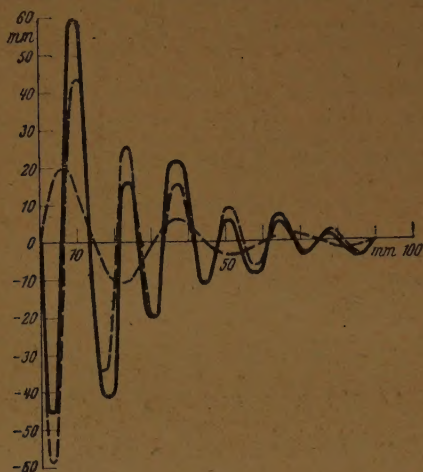


Bild 5.

Auf die gleiche Weise bestimmt man die Registrierkurve der Bild 2 als eine Überlagerung zweier Wellen aus denselben Frequenzen und dem gleichen Amplitudengesetz:

$$X = 40,5 e^{-0,04t} \sin \frac{2\pi}{30} t - 18,5 e^{-0,04t} \sin \frac{2\pi}{13,6} t.$$

Sie ist in Bild 6 wiedergegeben und zeigt wesentliche Übereinstimmung mit Bild 2. Bemerkenswerterweise

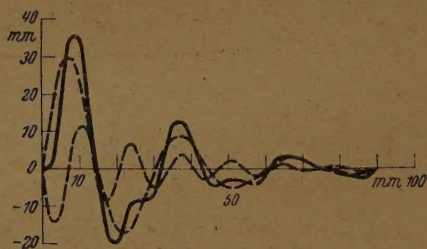


Bild 6.

hat sie die Form, welche Martin¹⁾ für solche Stoßvorgänge angegeben hat (l. c. Gl. 3), da sie folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$X = 18,5 e^{-0,04t} \left(2,2 \sin \frac{2\pi}{2,2 \cdot 13,6} t - \sin \frac{2\pi}{13,6} t \right),$$

wie Herr Martin dem Verfasser mitteilte. Allerdings reicht das bisher analysierte Material nicht zu Beurteilung dafür aus, ob diese Form für die hier angezogenen Stoßvorgänge charakteristisch ist. Vgl. Blume l. c. Bild 9 u. 12). Führt man nun unter Be-

nutzung der Formeln:

$$Z(t) = a e^{-\epsilon t} \sin(\alpha t - \beta)$$

$$\ddot{Z}(t) = \frac{a \alpha^2}{\cos^2 \varphi} e^{-\epsilon t} \sin(\alpha t - \beta + 2\varphi),$$

wo $\tan \varphi = \frac{\epsilon}{\alpha}$, die Integration der Kurven in Bild 5 durch, so erhält man die Bild 7 und durch Differentiation der Kurve Bild 6 die Bild 8. Auch hier liegt

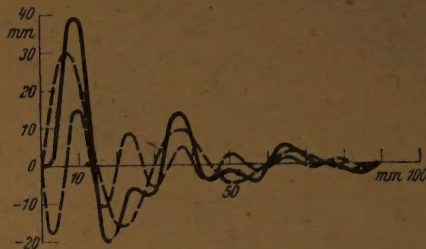


Bild 7.

in beiden Fällen wesentliche Übereinstimmung vor. Damit ist erwiesen, daß das eingangs angeführte Analysierproblem als gelöst angesehen werden kann.

Wie in dem hier gebrachten Beispiel die Schwingung der Straßendecke bestimmt worden ist, so kann durch dasselbe Verfahren das schwingungsmäßige Verhalten

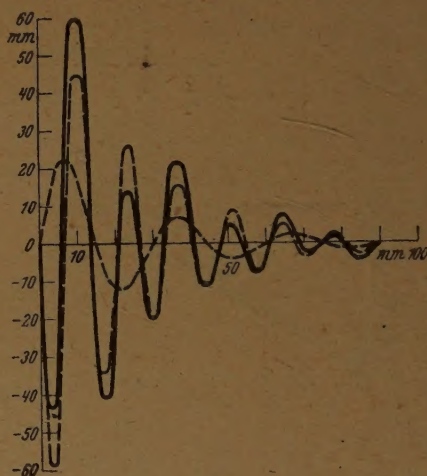


Bild 8.

von Betonwänden, Brücken, Schiffswänden usw. gegenüber Stoß, Schlag oder Ansprengung aus entsprechenden Registrierungen abgeleitet und mit ihrer Art, Form und Widerstandsfähigkeit in Beziehung gebracht werden. Schließlich eröffnet sich mit dieser Analysiermethode die Möglichkeit einer genaueren Eichung von Erschütterungsmessern bei der Registrierung stoßartig verlaufender Vorgänge.

Hamburg.

Hans Blume.

NACHRICHTEN

Bonn: Prof. Dr. Fr. Becker wurde zum o. Prof. der Astronomie und zum Direktor der Universitätssternwarte ernannt.

Darmstadt: Prof. Dr. A. Walther wurde für das Amtsjahr 1947/48 Prorektor der Technischen Hochschule.

Stuttgart: Prof. Dr.-Ing. e. h., Dr. R. Grammel wurde für das Amtsjahr 1947/48 einstimmig zum Rektor der Technischen Hochschule wiedergewählt.

Bern: Die Technische Hochschule Bern verlieh dem Prof. der Universität Stanford (Kalifornien) S. Timoshenko die Würde eines Ehrendoktors.

Verantwortlich für den Inhalt: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden; für den Verlag: H. Kaesser, Berlin. Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin N 4, Chausseest. 106, Fernsprecher: 42 50 01 (Verlag App. 274, Vertrieb App. 275), Postscheckkonto: Berlin 35 021. Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1009/25—27/5—6. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: Vierteljährlich RM 15.— zuzüglich Bestellgeld, Einzelheft RM 6.—. Verantwortlich für den Anzeigenteil: Curt F. W. Schreiber, Berlin. Druck: Julius Beltz, Langensalza. (Th. B.-Nr. 04011/16b) — Nr. 994. — Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 245 der Sowjetischen Militär-Verwaltung in Deutschland.